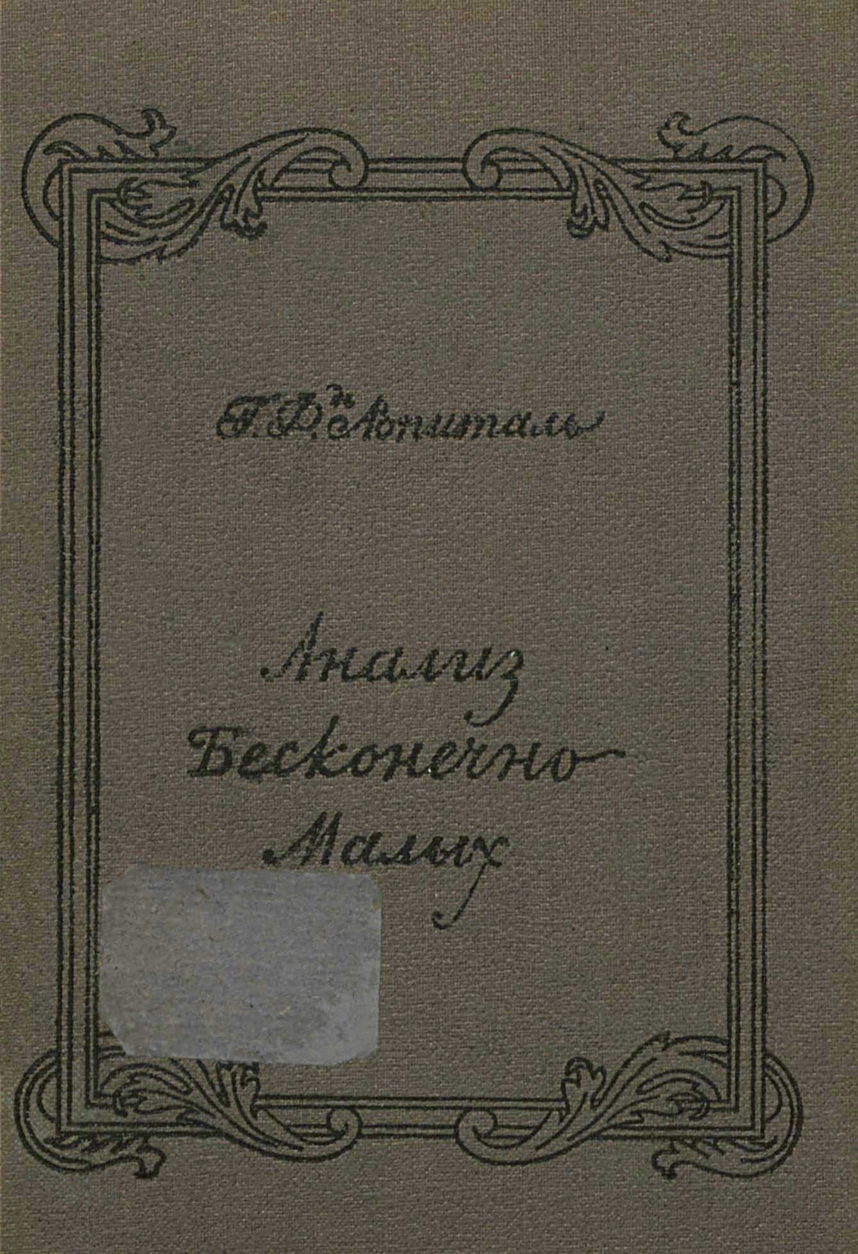

Г. Ф. де Лопиталь
Анализ
Бесконечно
Малых

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

❖

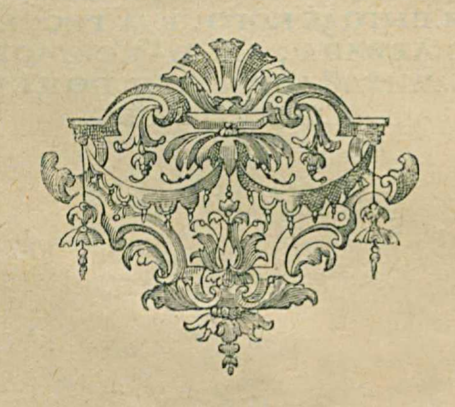
ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ

И. И. АГОЛА, С. И. ВАВИЛОВА,
М. Я. ВЫГОДСКОГО, Б. М. ГЕССЕНА,
М. Л. ЛЕВИНА, А. А. МАКСИМОВА,
А. А. МИХАЙЛОВА, И. П. РОЦЕНА,
А. Я. ХИНЧИНА

ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.

Par M^r le Marquis DE L'HOSPITAL.

SECONDE EDITION.



A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du Quay des Augustins du côté du Pont S. Michel.

MDCCXVI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

Г. Ф. де Лопиталь

Анализ бесконечно малых

Перевод с французского
Н. В. Леви
под редакцией
и со вступительной статьей
А. П. Юшкевича

Государственное
технико-теоретическое
издательство
Москва 1935 Ленинград

Переплет, суперобложка
и графическая орнаментация книги
художника А. С. ЛЕВИНА
Чертежи работы М. Сыркина и А. Энгельгардт

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий перевод сделан с французского издания 1768 г. При переводе „Анализа бесконечно малых“ было решено в соответствии с порядком издания всей серии классиков строго придерживаться подлинного текста. Все формулы поэтому точно передают оригинал. Это не могло не отразиться на стиле изложения, поневоле отступающего иногда от правильной речи, ибо формулы у Лопиталя нередко врываются в середину фразы самым неудобным для нас образом. Точно так же, за немногими исключениями, дословно передается и терминология автора.

Чертежи представляют собой почти точные копии с чертежей издания 1768 г., поскольку первого издания книги найти не удалось ни в московских, ни в ленинградских библиотеках. Неполностью или не вполне точно вырисованные кривые сохраняются в том же виде; только в немногих случаях, когда, например, нехватает какой-нибудь буквы, внесены исправления.

К книге мною приложены некоторые примечания, частью разъясняющие принятые Лопиталем обозначения, частью представляющие собой справки, предназначенные для лучшей исторической ориентировки в этом старом математическом сочинении, частью наконец служащие пояснениями к отдельным местам.

Примечания последнего вида не претендуют на исчерпывающую полноту и не имеют целью дать комментарии ко всем сколько-нибудь трудным задачам, требующим некоторого внимания при решении; дело читателя самому разобрать их. Их назначение в указании того или иного редко встречающегося в современных учебниках свойства кривой, на котором основывается Лопиталь, некоторых его ошибок и т. п. Все редакционные примечания помещены после текста и отмечены арабской нумерацией.

В квадратные скобки вставлены для связи слова, отсутствующие в оригинале.

А. Юшкевич

Первый печатный курс дифференциального исчисления

Статья
А. П. Юшкевича

I

Официальной, хотя и не фактической датой рождения современного диференциального исчисления был, как известно, май 1684 г., в котором Лейбниц опубликовал первую статью, в сжатой и малодоступной форме излагавшую основные принципы нового анализа [1]). Наряду с введением специального знака

[1]) Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, *Acta eruditorum* 1684. См. *Leibniz. Math. Schr.*, hsg. von Gerhardt, т. V, стр. 220 и след. Немецкий перевод Г. Ковалевского в серии классиков Оствальда, № 162, Leibniz, Über die Analysis des Unendlichen.

В дальнейшем я совершенно не касаюсь соответствующих работ Ньютона, более ранних, чем статьи Лейбница, но опубликованных, за исключением „Математических начал естественной философии“, в которых подробного изложения теории флюксий также нет, значительно позднее,

для выражения диференциалов, приращений величин, в ней приведены без доказательства правила вычисления диференциалов суммы и разности, произведения, частного, степени и корня и даны указания, как применять диференциалы при изучении максимумов, минимумов и точек перегиба кривых, при проведении касательных. Лейбниц ясно понимал значение предлагавшегося им общего алгорифма, названного им самим „диференциальным исчислением", и его превосходство над более специальными методами, ранее практиковавшимися для решения инфинитезимальных проблем и в частности плохо и лишь иногда справлявшимися с иррациональностями. Понято это вскоре было и другими, правда немногочисленными, математиками. Уже в 1685 г. шотландский ученый Джон Крэг выпустил одну работу, употребляющую лейбницевы обозначения, его диференцирование иррациональностей и способ проведения касательных [1]). Ближайшие же годы после выхода в свет „Нового метода" дали Лейбницу двух талантливейших сотрудников в лице братьев Якова и Иоганна Бернулли. Этот триумвират в течение десятилетия значительно углубил применение диференциального исчисления к различным задачам математики и механики.

В 1686 г. Лейбниц вводит понятие о кривизне линий в точке, измеряющейся кривизной того круга,

[1]) J. Craig, Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi.

который образует с кривой в этой точке наименьший угол смежности, т. е. соприкасающегося круга. При этом, правда, он допустил ошибку, утверждая, что соприкасающийся круг имеет два прикосновения к кривой, т. е. проходит через четыре бесконечно близкие точки кривой [1]), ошибку, которую исправил Яков Бернулли в 1692 г. [2]). В том же году он публикует первую статью, в которой встречается знак интеграла и выясняется природа исчисления, обратного диференциальному и по диференциальным уравнениям определяющего „суммарные“ уравнения (слово „интеграл“ вводится Яковом Бернулли в 1690 г.) [3]). В 1689 г. Лейбниц ставит задачу об отыскании линии, названной им изохроной и обладающей тем свойством, что падающая по ней тяжелая точка в равные времена спускается по вертикали на равные отрезки; он доказывает затем, что изохроной является полукубическая парабола. В 1692 г. он занимается линиями, служащими местом точек пересечения соседних „ближайших“ кривых, принадлежащих к некоторому семейству и зависящих от переменного параметра, т. е. огибающими („lineae concursum“ по его терминологии), причем дает известное правило нахожде-

[1]) Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi *Leibniz. Math. Schr.*, т. VII, стр. 326 и след.

[2]) Jac. Bernoulli, Opera, т. I, стр. 473 и след.

[3]) De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum, *Leibniz. Math. Schr.*, т. V, стр. 226 и след.

ния их уравнений [1]); к этому же вопросу он возвращается в 1694 г. [2]). В 1692 же году им рассматриваются в связи с вопросом о развертках так называемые параллельные линии. В 1693 г. он пользуется при интегрировании диференциальных уравнений бесконечными рядами на основе метода неопределенных коэфициентов. В 1695 г. Лейбниц (и независимо от него Иоганн Бернулли) находит диференциал для общего показательного выражения u^v [3]).

Братья Бернулли познакомились с первой работой Лейбница в 1687 г. Разбор ее несомненно доставил им немало затруднений; вместе с тем, оценив ее по достоинству, они оба стали убежденными сторонниками диференциального исчисления. С 1690 г. они начинают публикации своих работ по этому вопросу. Так, в указанном году Яков Бернулли выводит и интегрирует диференциальное уравнение упомянутой лейбницевой изохроны и ставит задачу об определении линии, образуемой подвешенным за два конца гибким канатом. Эту проблему вскоре же разрешают Гюйгенс, Лейбниц и младший брат Иоганн, впервые при этом—в июне 1691 г. — публикующий работу по новому анализу. В 1691 г. Яков Бернулли детально

[1]) De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se concurrentibus formata easque omnes tangente, *Leibniz. Math. Schr.*, т. V, стр. 266 и след.

[2]) Nova calculi differentialis applicatio et usus etc., *Leibniz. Math. Schr.*, т. V, стр. 301 и след.

[3]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. V, стр. 323.

изучает различные свойства (перегибы, касательные, площади, развертки) параболической спирали и вводит полярные координаты; в 1692 г. исследует логарифмическую спираль и ее каустики отражения и преломления; в 1694 г. он дает выражение для радиуса кривизны (для прямоугольных координат в виде $ds^3 : (dx\, ddy)$ [1]). Иоганн Бернулли далее в 1692 г. дает набросок диференциального [2]) и интегрального [3]) исчислений, о первом из которых еще будет итти речь ниже. Наконец, оба брата и Лейбниц интегрируют в этот же период ряд диференциальных уравнений.

К середине 90-х годов XVII в. накопилось таким образом большое количество материала по новому анализу. Казалось даже — разумеется, ошибочно, — что в одной части его, диференциальном исчислении, все сделано, и например, Лопиталь в первом своем

[1]) Jac. Bernoulli, Opera, т. I, стр. 431 и след. 442 и след., 491 и след., 578.

[2]) Iohannis Bernoulli, Lectiones de calculo differentialium. Впервые опубликовано в 1922 г. в *Verhandlungen der Naturforsch. Gesellschaft in Basel*, т. 34, стр. 1 и след. Немецкий перевод П. Шафхейтлина в серии классиков Оствальда, № 211, Ioh. Bernoulli, Die Differentialrechnung.

[3]) Lectiones mathematicae de methodo integralium, Ioh. Bernoulli, Opera, т. III, стр. 385 и след. Немецкий (неполный) перевод Г. Ковалевского в серии классиков Оствальда, № 194, „Die erste Integralrechnung“. В этой книге дается множество квадратур, ректификаций, исследуются эволюты, каустики, изучается цепная линия и т. д.

письме к Лейбницу писал, что оно представляется ему „уже завершенным“ [1]).

Этот материал был разбросан по журнальным статьям, посвященным тем или иным отдельным вопросам и притом доступным лишь крайне немногочисленным специалистам. Вместе с тем отсутствовало какое-либо руководство, которое систематически излагало бы основные приемы анализа с самого начала и позволило бы расширить круг лиц, работающих в этой области. Задачу составления подобного курса по диференциальному исчислению взял на себя Лопиталь.

II

Маркиз Гильом-Франсуа Лопиталь родился в 1661 г., умер в 1704 г. В молодости, как и многие другие дворяне, военный, он рано оставил службу по слабости зрения и всецело отдался занятиям математикой. Безусловно талантливый и одаренный, он выдвинулся в 90-х годах на весьма видное место в школе Лейбница благодаря как своей научной деятельности, так и своему положению; участник ученого кружка, группировавшегося вокруг известного философа Мальбранша, член Парижской академии наук, человек, близко стоявший к редакции Journal des Sçavans, одного из редких тогда научных журналов, он несомненно пользовался большим весом и влиянием. Вероятно, это обстоятельство, как и немногочисленность

[1]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. II, стр. 216.

знатоков нового анализа, послужило тогда причиной преувеличенной оценки его как ученого первого ранга; на самом деле пролагателем новых путей он не был. Даже Боссю, вообще говоря, относящийся к Лопиталю очень благожелательно, отмечает, что „может быть, при жизни его чрезмерно возвысили“ [1]).

Вместе с тем заслуги его перед математикой оказались весьма значительными, и своими работами он заслужил почетное место в ее истории.

Мы не располагаем точными сведениями о том, каким образом Лопиталь познакомился с новыми идеями, развивавшимися Лейбницем. Сам он в одном письме к последнему от ноября 1694 г. рассказывает, что еще за шесть лет до того, т. е. в 1688 г., прочел его „Новый метод“ и в результате изучения его самостоятельно составил довольно подробные записки по диференциальному исчислению [2]). Иоганн Бернулли же говорит, что анализу обучал Лопиталя он [3]). Можно думать, что оба утверждения эти не противоречат в основном друг другу. Лопиталь мог, разумеется, прочесть статью Лейбница; но надо полагать, что глубоко в тайны нового анализа он не проник. Известно, что в 1692 г. Иоганн Бернулли приехал в Париж, откуда отправился по приглашению

[1]) Ch. Bossut, Histoire générale des mathématiques, *Paris* 1810, т. II, стр. 50.

[2]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. II, стр. 250 и след.

[3]) M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. III, стр. 223.

Лопиталя в поместье последнего в Турени, где они провели в совместных занятиях четыре месяца. Нельзя не думать, что роль ученика в них играл Лопиталь, менее посвященный в эти вопросы, ничем себя в этой области не проявивший и по способностям уступавший младшему, чем он, швейцарцу. Подтверждается это и тем, что сохранились записи лекций по диференциальному и интегральному исчислениям, читанных Лопиталю Иоганном Бернулли; наконец, косвенным образом об этом свидетельствует тот факт, что Лопиталь вступает в переписку с Лейбницем лишь 14 декабря 1692 г.

К концу 1692 г. во всяком случае Лопиталь свободно владел новым исчислением. С этого времени и начинается его яркая научная карьера. До того он был известен мало, хотя некоторое имя ему составило выступление в защиту Гюйгенса в одном споре с Кателаном. И значительная доля его деятельности протекает то в тесном контакте с Иоганном Бернулли, то в связи с работой последнего.

В сентябре 1692 г. в Journal des Sçavans появляется заметка о „Решении одной задачи, предложенной некогда г. де-Боном г. Декарту", в которой требуется определить кривую с тем свойством, что отношение ординаты к подкасательной равно отношению данного отрезка к отрезку ординаты, заключенному между кривой и прямой, проходящей через начало координат под углом в 45° к оси. В ней определяются площадь и центр тяжести, асимптоты

этой кривой, объем и центр тяжести соответствующего тела вращения. Эта работа — совместная Лопиталя и Бернулли; причем каждый из них независимо от другого приписывал ее себе. В собрании сочинений Бернулли в примечании к ней говорится: „Эта статья была составлена маркизом Лопиталем и г. Бернулли сообща. Поэтому оба считали себя вправе приписывать ее самому себе“ [1]. Несколько странное и наивное пояснение это показывает, что элемент тщеславия и славолюбия был присущ обоим лицам; в дальнейшем он дал себя чувствовать еще более остро.

В 1693 г. Лопиталь наряду с Лейбницем, Гюйгенсом и Яковом Бернулли решает другую, аналогичную задачу, поставленную Иоганном Бернулли, где нужно было найти кривую, для которой отношение длины касательной к части оси между кривой и касательной постоянно [2].

В 1695 г. Лопиталь предложил и решил задачу о висячих мостах. Мост AB может вращаться вокруг оси A и за один конец он подвешен на проходящем по блоку C канате BCM, в точке M которого находится уравновешивающий груз. Нужно определить вид кривой CMN так, чтобы равновесие сохранялось, где бы ни находился на ней груз M. Лопиталь

[1] Ioh. Bernoulli, Opera, стр. 62—63.

[2] См. Bossut, цит. соч., т. II, стр. 20 и Ioh. Bernoulli, Opera, т. I, стр. 66.

определяет ряд свойств этой „кривой равновесия“, как он ее называет, и дает ее уравнение в виде:

$$a\sqrt{x^2+y^2}=bx+\frac{1}{2}(x^2+y^2),$$

где $x=PC$, $y=PM$ (точка P взята на линии AC). И в том же номере Acta eruditorum содержится дополнение Иоганна Бернулли, в котором он, отмечая большое практическое значение задачи не только для военной — на что указывает Лопиталь, — но и для гражданской архитектуры, доказывает, что „кривая равновесия“ есть циклоида, описываемая при качении круга по равному ему кругу, т. е. эпициклоида, что дает гораздо более простой способ ее построения [1]). Лопиталь, между прочим, в письме к Лейбницу от 8 июля 1695 г. рассказывает, что, узнав от Бернулли о существовании более простого приема построения, нашел его сам, но что сообщение его редакция Acta почему-то не опубликовала [2]).

Большую славу принесло Лопиталю и найденное им почти в одно время с Ньютоном, Лейбницем и Яковом Бернулли решение задачи Иоганна Бернулли о брахистохроне, т. е. линии, по которой тяжелая точка спускается от одного ее пункта к другому в кратчайшее время (ею, как известно, является циклоида) [3]).

[1]) Обе работы см. в Ioh. Bernoulli, Opera, т. I, стр. 129 и след. Задача была решена также Лейбницем и Яковом Бернулли.

[2]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. II, стр. 290.

[3]) *Acta eruditorum*, май 1697 г.

Правда, решение он нашел позднее других, перед самым концом срока, поставленного автором задачи; объяснял это он кроме трудности задачи тем, что был долго болен. В обзоре различных решений Иоганн Бернулли о лопиталевом ревниво, хотя и справедливо говорит: „Что касается решения маркиза де-Лопиталя, появившегося в том же майском выпуске Лейпцигских деяний, то оно вполне согласуется с нашим. Он не дал анализа задачи (т. е. доказательства — *А. Ю.*), но, как это известно мне из присланного им частного письма, метод его покоится на тех основаниях, с которыми я некогда его ознакомил для общего исследования цепных линий..." [1].

Наконец, в 1699 г. Лопиталь занялся проблемой о форме тела вращения, испытывающего при движении в жидкости наименьшее сопротивление, проблемой, поставленной и решенной без приведения доказательства Ньютоном в „Математических началах естественной философии". Через несколько месяцев появляется и дополняющая исследования Лопиталя статья Иоганна Бернулли [2]. Принадлежат Лопиталю решения еще и других задач.

Своим успешным участием в этих своеобразных научных конкурсах Лопиталь показал, что является не простым любителем математики. Он был принят крупнейшими аналистами как равный, хотя, надо думать,

[1]) Ioh. Bernoulli, Opera, т. I, стр. 199—200.

[2]) То и другое см. там же, т. I, стр. 311 и след.

в глубине души они и сознавали наличие определенного неравенства дарований. На протяжении долгих лет он переписывается с Лейбницем; Яков Бернулли посвящает ему, наряду с Ньютоном, Лейбницем и Фатио де-Дюиллье, свое крупнейшее исследование по изопериметрическим задачам; среди своих научных друзей он считает почти всех выдающихся математиков Европы. И все же он не стоит на том же уровне творчества, что и Бернулли, не говоря уже о титанах, создавших современный анализ. Это особенно заметно из всей переписки его со своим прежним учителем и с Лейбницем. Он высказывает в ней, разумеется, интересные идеи, излагает иные доказательства, но как правило — и в главном — он не дающий, а берущий. Стоит перечитать ее, и ясно видно, как он от раза к разу спрашивает советов, указаний, решений, которые ему и посылают его корреспонденты. Об этом еще будет сказано дальше.

Особенную известность Лопиталь получил благодаря выпущенному им анонимно в 1696 г. „Анализу бесконечно малых“. Историю его возникновения он излагает в письме к Лейбницу от ноября 1694 [1]). Друзья его, в частности Мальбранш, ознакомившись с его записками по диференциальному исчислению, стали еще в 1691 г. уговаривать его издать их. Известный картезианец аббат Кателан, принадлежавший к тому же кругу, узнав об этом, решил упредить его и

[1]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. II, стр. 250 и след.

в следующем же году выпустил книгу „Logistique universelle pour la science générale des lignes courbes“. Это сочинение, написанное во славу Декарта, стремилось представить излагаемый в нем в завуалированном виде лейбницев метод, как продолжение идей Декарта, при этом Лейбниц и не упоминался. Самая необходимость введения новых методов Кателаном отрицалась. Кроме того, этот плагиат был полон глубоких ошибок. Лопиталь, скрывшийся под псевдонимом, дал в Journal des Sçavans резкую критику работы Кателана. Теперь он просил у Лейбница согласия на выпуск диференциального исчисления, которое должно послужить как бы введением для предполагаемой книги Лейбница по интегральному исчислению и облегчить тем самым последнему работу.

В своем ответе от 27 декабря Лейбниц горячо поддерживает предложение Лопиталя, любезно пишет о чести, которую оказывает ему то, что его идеи дали повод к работам Лопиталя, и указывает, что все это тем более важно, что автором явится человек, свидетельство которого может придать излагаемому предмету большой вес [1]).

„Анализ бесконечно малых“ оказался таким образом первым печатным курсом диференциального исчисления, причем именно исчисления диференциалов; производные в этом типичном сочинении лейбницевой школы, разумеется, отсутствуют. Курс оказался чрезвычайно удачным.

[1]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. II, стр. 255 и след.

В кратком введении Лопиталь излагает историю возникновения нового анализа, останавливаясь на работах Декарта, Гюйгенса, Лейбница, а также выражает свою благодарность последнему и братьям Бернулли. „Под конец я должен признать, — писал он, — что я многим обязан знаниям гг. Бернулли, особенно младшего из них, состоящего в настоящее время профессором в Гронингене. Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница. Поэтому я не имею ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить“.

Одним из главных достоинств „Анализа“ является последовательность изложения. Первая глава курса начинается с основных определений постоянных и переменных величин, объяснения употребляющихся обозначений и установления исходных постулатов, на которых основываются все дальнейшие действия с бесконечно малыми величинами. Далее выводятся правила диференцирования алгебраических выражений. Тем самым оказывается заложенным фундамент, на котором базируются две следующие главы, посвященные проведению касательных и отысканию наибольших и наименьших значений. При этом интересно, что, не зная диференциалов иных выражений, как алгебраических, Лопиталь уравнения всех изучаемых трансцендентных кривых с помощью подбора тех или иных специальных координат приводит к алге-

браическому виду, то пользуясь неким подобием полярных координат, то устанавливая зависимость между различными прямолинейными и криволинейными отрезками изучаемых и подсобных линий. Он проделывает это с большим искусством, для нас, впрочем, теперь излишним и затрудняющим чтение, ибо нам проще продиференцировать ту или иную трансцендентную функцию, чем всякий раз, пользуясь какимилибо свойствами кривой, составлять подходящее алгебраическое уравнение.

При изложении теории максимумов и минимумов Лопиталь обращает внимание на перемену знака диференциала ординаты близ соответствующих точек — хотя решения задач не содержат специального исследования вида экстремума — и разбирает случай обращения диференциала не в нуль, а в бесконечность. Здесь же дается прием определения асимптот к кривой.

Четвертая глава начинается снова с определений на этот раз диференциалов высших порядков и относящихся к ним действий, необходимых при исследовании точек перегиба и возврата первого рода. В ней выводятся аналитические условия наличия таких точек. В пятой главе изучаются развертки и развертывающие, устанавливаются известные свойства их нормалей и касательных и даются формулы радиуса развертки, т. е. радиуса кривизны для развертывающей в прямоугольных и полярных координатах. Вместе с тем тут же рассматривается вопрос о том,

когда развертка оказывается алгебраической кривой и когда спрямляемой; на основании одной специальной леммы здесь также — в отступление от изложения чисто диференциального исчисления — даются квадратуры некоторых кривых, осуществляемые, впрочем, без применения интегрирования, а окольными путями, посредством сравнения различных элементов площадей. В том же разделе исследуется вопрос о радиусе кривизны в точках перегиба и устанавливается, в связи с образованием разверток, что он в них бывает не только бесконечным, но и равным нулю. Наконец, в заключение главы приводится пример точки возврата второго рода и соответствующий ей аналитический признак.

Шестая и седьмая главы посвящены детальному разбору диа- и катакаустик, очень интересовавших тогда ученые круги, а восьмая уделена огибающим. В девятой главе приводится знаменитое правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ и снова содержатся некоторые квадратуры; в ней же рассматривается кривая, обладающая точкой самоприкосновения, как сказали бы теперь. Глава десятая дает с помощью диференциального исчисления вывод правил отыскания касательных и т. п., указанных Декартом и Гудде.

Стройная архитектура сочинения уже одна играла большую роль. К ней присоединялись относительная простота изложения и необыкновенное обилие при-

меров разной степени трудности, разбор которых позволял и набить руку и глубже понять общие рассуждения и приемы.

Книга Лопиталя справедливо произвела на современников сильное впечатление. Секретарь Парижской академии наук, Фонтенелль, в похвальном и вообще преувеличенно хвалебном слове Лопиталю мог сказать с полной искренностью: „До того времени новая геометрия была своего рода тайной и, так сказать, кабалистической наукой, известной пяти-шести лицам. В журналах часто приводились решения без указания на метод, с помощью которого их получали; но даже когда его излагали, то пробивались лишь слабые лучи этой науки, а вслед затем облака тотчас же снова смыкались. Публику, или, лучше сказать, тех немногих, которые питали интерес к высшей геометрии, поражало бесплодное и не просвещавшее их изумление. Ученым удавалось добиться их аплодисментов, не давая тех познаний, которыми они должны были бы их оплатить“ [1]). Фонтенелль отмечал и ту жадность, с которой набросились на „Анализ“ все начинающие математики.

„Анализ“ выдержал ряд изданий: 1696, 1715, 1720, 1768 гг., и был переведен в 1730 г. на английский язык. И еще сто лет спустя Монтюкла писал о нем,

[1]) Fontenelle, Histoire du renouvellement de l'académie des sciences en MDCXCIX et les éloges historiques de tous les academiciens morts depuis ce renouvellement, Amsterdam 1709, стр. 101.

как о „хорошей и удачно составленной книге, что было качеством довольно редким и до того и даже ныне в математических сочинениях, в которых отсутствие системы и метода часто вредит их подлинному достоинству“ [1]), а Боссю причислял его к группе книг и доныне классических [2]).

При всей относительной своей легкости „Анализ“ представлялся на протяжении XVIII в. все же недостаточно доступным. При том уровне общей математической культуры и преподавания это было неудивительно. В результате он трижды подвергся комментированию. Первый комментарий был составлен философом и математиком Круза (Crouzas) в 1721 г. Эта книга оказалась чрезвычайно неудачной, автор плохо понял „Анализ“, который стремился пояснить, и допустил много неясностей и грубых ошибок; например, он полагал, что деление бесконечно малой первого порядка на бесконечно малую третьего дает бесконечно малую второго порядка и т. д. Его сочинение подверг немедленно критике Иоганн Бернулли [3]), со свойственной ему манерой заявивший между прочим, что Круза лучше сделал бы, если бы до печати послал ему для проверки рукопись, а вскоре затем, в 1723 г., французский математик Сорен (Saurin).

1) J. F. Montucla, Histoire des mathématiques, Paris, год VII (1799), т. II, стр. 397.

2) Bossut, цит. соч., т. II, стр. 27.

3) Ioh. Bernoulli, Opera, т. III, стр. 160 и след.

Вторым комментатором был Вариньон [1]), давший пояснения отдельных трудных мест, в частности самих принципов исчисления бесконечно малых, и отметивший некоторые ошибки Лопиталя. Его книга, однако, вряд ли читается легче комментируемого „Анализа". Третий комментарий, приложенный к изданию 1768 г. и написанный отцом Полианом (Paulian), назначался уже действительно для впервые приступающих к изучению высшего анализа; но удачным его счесть нельзя, так как он иногда с чрезмерной словоохотливостью разжевывает элементарнейшие выкладки и зато часто обходит места, которые могут затруднить при первом чтении.

„Анализ бесконечно малых" не свободен был, разумеется, и от недостатков. В первую очередь это относится к изложению его методологической базы. Все диференциальное исчисление развивается у Лопиталя из двух постулатов, один из которых позволяет принимать $x+dx$, где dx бесконечно мал по сравнению с x, за x, а другой принимает кривую равнозначащей со вписанным в нее многоугольником с бесконечным числом бесконечно малых сторон. Допущение этих двух, типичных для лейбницева анализа, как исчисления именно бесконечно малых диференциалов, требований, само по себе нельзя было бы поставить в вину Лопиталю. Но он все же должен был уделить больше внимания в своем курсе, пре-

[1]) Eclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits, Par M. Varignon, Paris 1725. Издание посмертное; название дано было издателем.

тендовавшем на роль общедоступного введения в новую науку, выяснению природы первых ее понятий и правомерности ее постулатов. Они вовсе не представлялись очевидными всем, и сам Лопиталь в предисловии пишет, что при печати последнего листа книги ознакомился с критикой анализа бесконечно малых Ньювентиитом. Ссылка на то, что Лейбниц опроверг возражения голландского математика, не могла служить оправданием отсутствия аналогичной антикритики, хотя бы в том же предисловии, если уже было поздно внести дополнения в самый текст. Отмеченное обстоятельство было учтено уже Вариньоном, в своих пояснениях вполне соглашающимся с тем, что $x + dx$ не равно x, и пытающимся доказать законность отбрасывания бесконечно малых в примере на проведение касательной тем, что когда секущая сливается с касательной, то dx и dy каждый обращаются в нуль, почему, на его взгляд, и допустимо отбрасывать их степени [1]). В переписке Лопиталя с Лейбницем возражениям Ньювентиита последний уделяет немало места, объясняя свое понимание „несравнимо малых“ величин и излагая доводы в пользу допущения бесконечно малых высших порядков, против которых особенно восставал последний [2]); они несомненно должны были бы занять место в „Анализе бесконечно малых“.

[1]) Varignon, цит. соч., стр. 12—13.

[2]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. II, письмо от 14 (24) июня 1695, а также стр. 293.

Во-вторых, у Лопиталя встречаются иногда и просто ошибочные рассуждения и выкладки, хотя и в очень небольшом числе. Здесь не стоит на них останавливаться; они отмечены в примечаниях.

Вместе с тем, в курсе естественно отсутствует ряд разделов, уже вскоре включающихся в диференциальное исчисление. Как говорилось, Лопиталь полагал, что в этой области, не в пример интегральному исчислению, все закончено. Но диференциалов трансцендентных функций у него еще не имеется; нет исследования экстремумов с помощью высших производных; совершенно отсутствуют разложения в ряды, в его время осуществлявшиеся без применения диференциального исчисления; исследование особых точек кривых находится в зародышевом состоянии и т. д. В этом нельзя и в малой степени упрекнуть Лопиталя, но обстоятельство это послужило естественной причиной быстрого устарения его книги. Можно скорее удивляться тому, что несмотря на эти пропуски она, благодаря достоинствам изложения и, отчасти, малой конкуренции, выдержала четыре столь отдаленных друг от друга издания и уступила место другим учебникам лишь более чем через полстолетие после выхода.

Лопиталь является также автором курса аналитической теории конических сечений [1]). Сочинение это,

[1]) Traité analytique des sections coniques et de leurs usage pour la résolution des équations dans les problèmes tant déterminez qu'indéterminez, первое посмертное издание 1707 г., второе 1720 г.

основывающееся на декартовом методе, подобно первой книге французского ученого, отличается простотой изложения и обилием примеров. В нем не содержится особенно существенных новых результатов; наиболее интересны, по словам Кантора, разбор общего уравнения второй степени и решение любопытной задачи, которой занимался также Ньютон: Два неизменных угла KAM, KBM вращаются вокруг неподвижных точек A и B; K, точка пересечения сторон AK и BK, движется по прямой линии; требуется определить геометрическое место точек пересечения M других сторон AM и BM (ими оказываются конические сечения) [1]).

III

Немного времени прошло со смерти Лопиталя, как в августе 1704 г. Иоганн Бернулли неожиданно выступил с первым из печатных заявлений, в которых он стал предъявлять свои авторские права на содержащиеся в „Анализе бесконечно малых" методы. На этот раз он выпускает в свет заметку под названием „Усовершенствование моего опубликованного в „Analyse des infiniment petits" § 163 метода для определения значения дроби, числитель и знаменатель которой иногда исчезают [2]). Не обвиняя явно покойного друга в плагиате, он рассказывает, что еще

1) Cantor, цит. соч., т. III, стр. 427.

2) Ioh. Bernoulli, Opera, т. I, стр. 401 и след.

лет за 10 до того сообщил ему о своем способе раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, причем решил для него как раз пример, который находится в § 164 „Анализа“ и который французские математики, в частности Лопиталь, решить не могли. Это правило наряду с другими, узнанными от Бернулли, Лопиталь напечатал. Ныне, движимый любовью к истине, он считает долгом указать, что иногда это правило недостаточно, так как после диференцирования числителя и знаменателя снова получается, по подстановке того же значения вместо x, $\frac{0}{0}$ или $\frac{m:0}{n:0}$; в этом случае нужно применить его правило к новой дроби еще один или несколько раз.

Через 17 лет, полемизируя — по другому, несущественному здесь поводу — с Тэйлором [1]), Бернулли снова выставляет свои претензии. На этот раз он выступает определеннее, сперва ссылаясь на выраженную ему Лопиталем благодарность, а затем заявляя, что им были составлены для Лопиталя записки по диференциальному исчислению и что им же был по просьбе последнего решен ряд задач, впоследствии опубликованных в „Анализе“. При этом указывалось, что содержание этих записок составило лишь незна-

[1]) Ioh. Bernoulli, Opera, „M. Ioh. Burcardi Basilleensis Epistola ad virum clarissimum Brook Taylor“, т. III, стр. 483 и след. (*Acta eruditorum*, май 1721.) Несомненно, что за Буркардом здесь стоял сам Бернулли.

чительную часть книги Лопиталя и что последний многое получил позднее в переписке. Утверждения эти подкрепляются отрывками из переписки с известным математиком П. де-Монмором и с самим Лопиталем.

Прежде всего привлекаются свидетельские показания о существовании упомянутых записок. „Я достаточно ныне убежден, — сообщает ему 26 июня 1718 г. Монмор, — на основании вашего письма, а еще более на основании того, что лет 13 или 14 назад прочел тетради и уроки, преподанные вами маркизу де-Лопиталю. Отец Рейно имел тогда в своем распоряжении всю рукопись, которую мне и одолжил“. Далее 18 октября того же года он писал: „Отец Рейно достал свою рукопись, небольшие обрывки из которой я заметил в его книге „Analyse démontrée“, у одного друга, бывшего вместе с вами в Париже и переписывавшего ваши лекции для г. де-Лопиталя. У отца Бизанс также имелся экземпляр рукописи. Когда я попросил маркиза де-Лопиталя одолжить мне ее, он дал мне письмо к отцу Бизанс, в котором просил одолжить мне экземпляр, принадлежащий тому; но очевидно он дал ему знать, что этого делать не следует, так как я его не получил. О. Рейно дал мне свой экземпляр, примерно, год спустя“ [1]).

[1]) Ioh. Bernoulli, Opera, т. III, стр. 509. Это письмо хранится в Стокгольмской академии наук. Следует учитывать, что некоторые свидетели, упоминаемые Монмором, (скончавшимся в 1719 г.), были еще живы тогда, например Рейно (умер в 1728 г.).

Для характеристики участия Бернулли в работе Лопиталя приведено было между прочим следующее: „Вы видите, сударь, — писал Лопиталь Бернулли 8 декабря 1692 г., — что я продолжаю просить вас обучать меня и пользуюсь в этом отношении той свободой, которую вы мне предоставили... Я хотел бы также, чтобы вы сообщили мне общий метод решения задач, подобных следующей. Дан некоторый полуэллипс AMB с заданными по положению полуосями; допустим, что бесконечное число парабол, проходящих все через точку A, имеют оси и вершины на полуэллипсе; требуется определить касающуюся всех их линию. Вместо эллипса и парабол можно взять и какие угодно другие линии“. Соответствующая задача находится в § 147 „Анализа“.

2 сентября 1693 г. наряду с просьбой решить одну задачу на касательные Лопиталь сообщает, что никак не может найти значение дроби

$$\frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$$

при $x = a$ (§ 164 „Анализа“). „Все решения, к каким я пока прихожу, оказываются неточными. Мне не хочется тратить понапрасну время, и я предпочел бы узнать это от вас, если это вам будет угодно“.

19 февраля 1695 г. — снова обращение к помощи Бернулли, в задаче об определении наибольшей ширины эпициклоид, образуемых при качении круга по кругу, если описывающая точка лежит внутри или

вне его, или же на окружности. Спрашивается также о точках перегиба при первой из этих возможностей. Эти задачи помещены в § 175 и 180. 16 апреля того же года Лопиталь благодарит за присланное решение и запрашивает о квадратуре этих кривых, которая излагается в § 182 и след. „Анализа“.

Уже эти письма показывают, что роль Бернулли при составлении курса Лопиталя была велика. Недоверять им крайне трудно; от Бернулли ведь могли потребовать их предъявления. Кроме того, например, та же задача об огибающей, которая ставится Лопиталем в письме от 8 декабря 1692 г., была послана им в первом же письме к Лейбницу 14 декабря, через несколько дней спустя. Правда, 24 февраля 1693 г. Лопиталь сообщает Лейбницу о том, что решил задачу [1]); но все же невероятно, чтобы значительно превосходивший его по дарованиям Бернулли не смог быстро дать ее решения и не прислал его по обычаю прежнему ученику. Утайки и присваивания на почве тщеславия обоих заинтересованных лиц все время, впрочем, мешают здесь устанавливать факты с абсолютной достоверностью.

В том же году, в упоминавшейся критике Круза, Бернулли в заключение писал ему следующее: „Вы, сударь, оказываете мне честь, признавая и соглашаясь в вашем последнем письме с тем, что этот комментированный вами Анализ в меньшей мере является

[1]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. II, стр. 225.

трудом маркиза де-Лопиталя, чем моим. Я хочу верить, что вы высказывались так не из любезности, но потому, что вы в том вполне убеждены на основании опубликованных неопровержимых доказательств". Далее Бернулли ссылался на статью Буркарда [1]).

Высшей точки претензии Бернулли достигают в 1742 г., когда он впервые публикует свое старое интегральное исчисление. Оно начинается неожиданной фразой: „Выше мы увидели, как определять диференциалы величин" и к слову „выше" дается сноска: „Автор имеет в виду предшествующие этому лекции по диференциальному исчислению, которые он счел нужным выбросить, так как все содержание их было включено знаменитым Лопиталем в пользующуюся всеобщим распространением книгу, озаглавленную им „Analyse des infiniment petits" [2]). Обвинения в плагиате здесь нет, как это полагает Кантор [3]) (ведь не утверждается, что книга была выпущена без согласия Бернулли), на книгу лишь предъявляются права ее основного участника.

Заявления Бернулли встретили со стороны историков различное отношение. Монтюкла, например, находил, что единственный упрек можно сделать Лопиталю за то, что он недостаточно ясно показал, „чем он обязан г. Бернулли, который нашел основные методы,

1) Ioh. Bernoulli, Opera, т. III, стр. 168.

2) Ioh. Bernoulli, Opera, т. III, стр. 387. Нем. перев., стр. 3.

3) Cantor, цит. соч., т. III, стр. 225.

применяемые в этой книге и которому принадлежит то наиболее остроумное, что в ней содержится по анализу“ [1]). Напротив, Боссю, замечая, что может быть Бернулли и не дал решения приведенных здесь выше задач или что Лопиталь мог их все решить самостоятельно, что, далее, лекции Бернулли могли быть не по диференциальному исчислению, указывая наконец на возвышенный характер Лопиталя, приходит к выводу: „При подобных обстоятельствах наиболее разумным и справедливым будет держаться того общего заявления, которое маркиз Лопиталь сделал в своем предисловии, именно, „что он многим обязан знаниям Иоганна Бернулли“. Будь он обязан чем-либо специально, он не позволил бы себе выразить лишь столь общую благодарность“ [2]).

Против Бернулли высказывались и современные историки Цейтен и — особенно резко — Кантор. Большую роль в их оценке играло при этом психологическое обстоятельство — дурной характер Иоганна Бернулли, человека действительно с крайне обостренным самолюбием, переходящим в чрезмерное тщеславие, человека, на этой почве поссорившегося с братом, бывшим ранее его учителем. „Утверждение (Иоганна Бернулли), — пишет Цейтен, — по многим соображениям является маловероятным; оно недоступно проверке, и характер Иоганна Бернулли никоим образом

1) Montucla, цит. соч., т. II, стр. 397.

2) Bossut, цит. соч., т. II, стр. 51—52.

не служит достаточным ручательством за достоверность этого утверждения" [1]).

Кантор защищал тезис о значительной самостоятельности Лопиталя с энергичной уверенностью. С одной стороны, он основывался на рассказе самого Лопиталя о его занятиях в упоминавшемся письме к Лейбницу. „Я нашел там (в Acta eruditorum от 1684 г.) ваш метод касательных, который мне так понравился, что я затем составил записки, в которых разъяснил его более пространно и привел доказательство всех ваших правил". Но из этого следовало бы лишь — если верить рассказчику и считать его характер более благородным, чем у Бернулли, — что Лопиталь к 1691 г. знал то, что содержится в первых двух главах „Анализа". Содержание остальных восьми глав этим заявлением еще совершенно не затрагивалось, и тогда можно было бы думать, что с ним-то и познакомил Лопиталя Бернулли. На это указал Кантору еще Г. Энештрем [2]), отмечавший также то важное и свидетельствующее против Лопиталя обстоятельство, что в письмах к Гюйгенсу от 1690 г. Лопиталь совершенно не пользуется диференциальным исчислением. тогда как в 1693 г. он легко

[1]) Г. Г. Цейтен, История математики в XVI и XVII вв., перевод П. Новикова, обработка и примечания М. Выгодского, 1933. Надо заметить, что книга Цейтена в оригинальном издании вышла до открытия новых документов и что его утверждение относится к 1903 г.

[2]) *Bibliotheca mathematica*, 1914 г., стр. 177.

оперирует с его помощью. Что же касается содержания глав, следующих за второй, то тот же Энештрем, располагавший хранящейся в Стокгольмской академии наук перепиской Лопиталя и Бернулли, показал, что оно в большой мере было получено первым от последнего, — в частности так обстояло дело и с „правилом Лопиталя“ [1]). Сказанное подтверждается частью и приведенными выше отрывками из писем Лопиталя к Бернулли.

С другой стороны, Кантор указывал на то, что фактически рукописи Бернулли нет. Где она находится, спрашивал он, — и резюмировал свое мнение в следующих выражениях: „Таким образом установлено, что выдвинутое в 1742 г. Бернулли против Лопиталя обвинение заходит слишком далеко и что резкость его утверждений росла по мере того, как он все увереннее чувствовал, что опровергнуть его нельзя. Здесь мы имеем перед собой одно из многочисленных ложных заявлений, которые можно найти у Иоганна Бернулли и которое служит примером того, насколько можно доверять его хвастовству и его чрезмерно широкой совести“ [2]).

[1]) См. „Die Differentialrechnung“ Бернулли, предисловие Шафхейтлина, стр. 6 и *Bibliotheca mathematica*, 1914 г., стр. 177.

[2]) Cantor, цит. соч., т. III, стр. 225. В предисловии ко II изданию этого тома Кантор, учитывая замечания Энештрема, соглашается с авторским правом Бернулли на „правило Лопиталя“ и излагает письма Монмора, но в основном от позиции своей все же не отказывается (стр. V—VI). На

Как ни сурово звучат эти слова, скептики, сомневавшиеся в правдивости заявлений Бернулли, оказались неправыми. На самом деле теперь можно считать установленной малую правдоподобность рассказа Лопиталя и за содержание тех двух глав, которые Энештрем еще в 1914 г. условно оставлял за ним, также считать его в большой степени обязанным своему учителю. В 1920 г. П. Шафхейтлин, получивший доступ к математическим рукописям Базельской университетской библиотеки, случайно нашел среди них „Lectiones de calculo differentialium" Иоганна Бернулли.

Манускрипт этот содержит в себе 38 тетрадных страниц, за которыми следуют еще 11 глав из бернуллиевых лекций по интегральному исчислению. При чтении его сразу становится ясным, что он послужил основой для первых четырех глав книги Лопиталя. Правила диференцирования первой главы, а также оба постулата очевидно заимствованы из этих записок; совпадают и многочисленные примеры. Во второй и третьей главах, при значительных иногда отклонениях в изложении теории, рассматриваются по большей части одни и те же кривые; примеры на экстремумы тоже в значительной мере общие; особенно

вопрос Кантора — почему Бернулли не позаботился о сохранении своего „Диференциального исчисления", если оно было так же разработано, как „Интегральное исчисление", можно теперь ответить — именно потому, что оно представляло собой сырой материал, опубликовать который в аутентичном виде было невозможно.

близко сходство в решении задач § 59, 60, 61. То же можно сказать и о главе четвертой. В редакционных примечаниях ниже подробно указаны совпадения и отклонения обоих сочинений.

„Из всего этого,—заключал Шафхейтлин,—следует, что наряду с некоторым новым содержанием является несомненно доказанной зависимость Лопиталя от Бернулли. Поэтому понятно, что последний не удовлетворился общими фразами лопиталева предисловия и заявил известный протест“ [1]).

О рукописи нужно заметить еще следующее. Хотя она не датирована, но видно, что содержание ее относится ко времени до 1694 г. Так, вместо $4\sqrt{(yx+x^2)^3}$ в ней еще пишется $4C\sqrt{yx+xx}$; значок C (от cubus) в более поздних работах уже не попадается. В следующей за диференциальным исчислением части утверждается, что интеграл от $\frac{dx}{x}$ бесконечен, между тем как в 1694 г. Бернулли знал, что он представляет собой $\log x$ [2]). В рукописи имеются небрежности и недоделанности, отсутствующие у Лопиталя, приводится и один неверный чертеж, исправленный в „Анализе бесконечно малых“. Далее, рукопись сделана рукой не Иоганна Бернулли, а его племянника Николая. Так как тот родился в 1687 г., то записки не могли быть им конспектированы

[1]) Ioh. Bernoulli, Die Differentialrechnung, стр. 8.

[2]) Ioh. Bernoulli, Opera, т. I, стр. 126.

в 1691 г.; очевидно, что они относятся к 1705 г., когда он посетил своего дядю в Гронингене. Но вместе с тем они могут быть только конспектом старой рукописи Иоганна Бернулли; если бы они были результатом устного преподавания последнего, то в них не могли бы содержаться ошибочные утверждения вроде того, что интеграл $\frac{dx}{x}$ бесконечен.

Таким образом правота Иоганна Бернулли является доказанной [1]). Лопиталь остался его учеником и при составлении своего курса. На долю Лопиталя выпадает лишь менее существенная часть содержания книги: ряд примеров и, может быть, часть исследования особых точек кривых. Целиком за ним остаются лишь упорядочение, проверка и пополнение материала, мастерство, с которым написан учебник, и его высокие педагогические заслуги.

Остается еще уяснить мотивы поведения Бернулли. О планах издания книги он знал и их одобрил, по крайней мере не решался не одобрять. Об этом свидетельствует переписка обоих ученых осенью 1695 г. и зимою 1696 г. Когда Лопиталь сообщает, что

[1]) О том, насколько спокойно заимствовал Лопиталь из записок Бернулли даже целые отрывки, почти не изменяя при переводе расположения слов, свидетельствует также произведенное мною сравнение некоторых текстов „Анализа“ и бернуллиевых „Лекций по интегральному исчислению“. См. редакционные примечания в конце книги, особенно № 105.

он отдает Бернулли в книге „должную справедливость“ [1]), Бернулли благодарит, заявляя: „Уделив место в вашей книге моему имени, вы проявляете обычную любезность; я очень вам за это обязан“ [2]). По получении экземпляра книги в начале 1697 г. он снова выражает благодарность и добавляет: „Вы оказали мне слишком много чести, столь лестно высказываясь обо мне в предисловии; когда я что-либо напишу, я не премину отплатить вам тем же. Вы очень ясно все объясняете; расположение и порядок предложений очень удачны; вообще все сделано превосходно и в тысячу раз лучше, чем мог бы сделать я. Я только хотел бы, чтобы вы поставили свое имя на книге, что придало бы больше веса новому методу, не говоря о том, что книга тогда, без сомнения, раскупилась охотнее“. Он только считает лишним выражение благодарности своему брату Якову [3]).

Однако, если похвалы и были искренни, то удовлетворенным Бернулли все же не был. Возможно, что задела его помещенная в Journal des Sçavans от 1696 г. похвальная заметка „Анализу“, где говорилось о скромности автора, приписывающего себе лишь то, что ему уступят другие. Безусловно задело

[1]) 15 июня 1696, см. *Bibliotheca mathematica*, 1894, G. Eneström, Sur la part de Jean Bernoulli dans la publication de l'Analyse des infiniment petits, стр. 67.

[2]) 30 июня 1696, см. там же.

[3]) Там же, стр. 68.

его и то, что о нем в предисловии Лопиталя упоминалось все же лишь мельком, тогда как о заслугах, скажем, Гюйгенса и Лейбница говорилось подробно. Во всяком случае уже 8 февраля 1698 г. он, жалуясь Лейбницу на Лопиталя вообще (что тот пользовался его исследованиями при переписке с Гюйгенсом и пр.), в частности пишет: „Не более справедливо поступил он со мною, когда недавно выпустил свой „Анализ“. Правда, он признает в предисловии, что многим мне обязан, но это признание чересчур неопределенно и не становится лучше от того, что рецензент книги в Journal des Sçavans считает, что это признание есть лишь результат его великодушной скромности. За исключением немногих страниц (скажу тебе одному на ухо) все остальное он частью получил от меня в письменном виде, частью написал под мою диктовку, часть же, после того как я покинул Париж, получил в письмах, многочисленные свидетельства чего я сохранил и смог бы в подходящий момент опубликовать... кроме того, я располагаю письмами Лопиталя ко мне, показывающими, сколь многим он мне обязан. Главная заслуга его состоит в том, что он все привел в порядок и отделал по-французски аккуратно то, что я беспорядочно изложил ему частью по-французски, частью по-латыни. Как я сказал, собственного своего он добавил не более чем на 3 или 4 страницы. Но, пожалуйста, не сообщи ему того, что я рассказал тебе в уверенности в твоем молчании; иначе его

дружеское отношение ко мне изменится, без сомнения, на противоположное“ [1]).

Нетрудно понять, почему в то время Бернулли не мог публично выступить со своими претензиями и так боялся перемены в отношениях с Лопиталем. Как раз тогда между ним и братом Яковом разгорелись жестокий спор и ссора из-за изопериметрической задачи. Приобрести врага в лице влиятельного Лопиталя было бы совсем неуместно; наоборот, необходимо было поддерживать с ним самые дружеские отношения. Иоганн Бернулли предлагал его выбрать даже в качестве одного из третейских судей в этом споре. Дружеские отношения продолжались до смерти Лопиталя. Но внутренне враждебное отношение тем временем росло. Содействовало тому и подозрение Бернулли, будто Лопиталь внушил Сорену в 1702 г. мысль, что автором правила раскрытия неопределенностей является сам Лопиталь. И в письме к Вариньону от 18 июля 1705 г. Бернулли снова рассказывал примерно то же, что в приведенном письме к Лейбницу [2]).

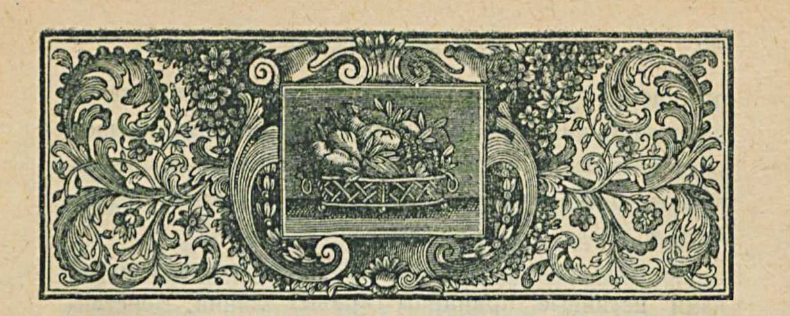
Когда в 1704 г. скончался Лопиталь, а в 1705 г. со смертью брата Якова естественно оборвался их спор, Иоганн Бернулли счел возможным все более энергично выступать со своими, как показано, правомерными претензиями.

[1]) *Leibniz. Math. Schr.*, т. III, стр. 480.

[2]) *Bibliotheca mathematica*, 1894, стр. 69—70.

Г. Ф. де Лопиталь

Анализ бесконечно малых



ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

ЗЛАГАЕМАЯ в этом сочинении форма анализа опирается на обычный анализ, но сильно отличается от него. Обыкновенный анализ имеет дело только с конечными величинами, новый же анализ проникает вглубь самого бесконечного. Он сравнивает между собою бесконечно малые разности конечных величин; он вскрывает отношения между этими разностями и тем самым дает нам возможность найти отношения между конечными величинами, которые по сравнению с этими бесконечно малыми являются как бы бесконечными. Можно сказать даже, что этот анализ простирается дальше бесконечного, ибо он не ограничивается бесконечно малыми разностями, но вскрывает отношения разностей этих разностей,

отношения третьих, четвертых разностей и так далее, никогда и нигде не останавливаясь. Таким образом он охватывает не только бесконечное, но бесконечное бесконечного или же бесконечность бесконечных.

Только такого рода анализ мог раскрыть перед нами истинные принципы кривых линий. Действительно, так как кривые представляют собой лишь многоугольники с бесконечным числом сторон и отличаются друг от друга лишь разностью углов, образуемых между собою этими бесконечно малыми сторонами, то только анализ бесконечно малых в состоянии определить положение этих сторон, чтобы получить образуемую ими кривизну, т. е. получить касательные к этим кривым, перпендикуляры [1]) к ним, их точки перегиба или возврата, лучи отражения, преломления и т. д.

Те вписанные или описанные вокруг кривых многоугольники, которые путем бесконечного умножения своих сторон сливаются наконец с этими кривыми, математики всегда принимали за сами кривые. Но дальше этого дело не шло; лишь после открытия излагаемого здесь анализа поняли все значение и плодотворность этой идеи.

То, что нам оставили по этому вопросу древние, в особенности Архимед, безусловно достойно восхищения. Но, во-первых, они имели дело лишь с весьма немногими кривыми, которых они коснулись к тому же лишь поверхностно, а затем они дали почти одни

только частные и не сведенные в систему предложения, в которых не видно никакого регулярного и последовательного метода. Однако было бы неправильным упрекать их за это: нужна была исключительная сила гения [a], чтобы пролить свет на такую темную область и вступить первыми в совершенно неизвестные страны. Если древние не продвинулись далеко, если они шли окольными путями, то, во всяком случае, вопреки мнению Виеты [b], они не заблудились; и чем более трудны и запутаны были пути, по которым они шли, тем более достойно удивления, что они не сбились с дороги. Одним словом, вряд ли древние могли сделать больше в свое время: они сделали то, что сделали бы на их месте гениальные люди нашего времени; а если бы они были на нашем месте, то они вероятно развили бы те же идеи, что и мы. Все это является следствием естественного равенства умов и необходимой последовательности в открытиях.

Таким образом нет ничего удивительного в том, что древние не пошли дальше. Но нельзя не пора-

[a] Archimedis de lineis spiralibus tractatum cum bis terque legissem, totasque animi vires intendissem, ut subtilissimarum demonstrationum de spiralium tangentibus artificium adsequerer; nusquam tamen, ingenuè fatebor, ab earum contemplatione ita certus recessi, quin scrupulus animo semper haereret, vim illius demonstrationis me non percepisse totam, etc. [2]). Bullialdus, *Praef. de lineis spiralibus.*

[b] Si verè Archimedes, fallaciter conclusit Euclides, etc. [3]) *Supl. Geom.*

жаться тому, что великие люди, притом без сомнения люди столь же великие, как и древние, оставались в течение столь долгого времени на том же месте и что благодаря почти суеверному уважению к творениям древних они ограничивались чтением и комментированием последних, пользуясь своими способностями ровно в той мере, в какой это было необходимо, чтобы иметь возможность следовать за древними, и не дерзая помыслить когда-нибудь самостоятельно и устремить свои взоры за пределы того, что открыли древние. Таким образом работало немало людей; они писали, число книг умножалось, и однако ничто не подвигалось вперед: бесчисленные труды ряда веков свелись в конце концов к почтительным комментариям и к повторным переводам довольно жалких подчас оригиналов.

Таково было состояние математики и особенно философии до г. Декарта. Этот великий человек, послушный своему гению и сознанию собственного превосходства, оставил древних, чтобы следовать только за тем самым разумом, за которым следовали древние. И эта счастливая смелость, которую иные считали бунтом, дала нам бесконечное множество новых и полезных идей по вопросам физики и геометрии. Тогда лишь люди раскрыли глаза и решились мыслить самостоятельно.

Обращаясь к математике, которая одна занимает нас здесь, должно сказать, что г. Декарт начал там, где закончили древние, именно начал с разрешения

одной проблемы, перед трудностями которой, по словам Паппа[a], остановились все древние [4]). Известно, до каких пределов довел Декарт анализ и геометрию; известно также, как благодаря произведенному им сочетанию этих отраслей математики стало легко решать бесконечное множество проблем, казавшихся до него недоступными. Но так как Декарт интересовался главным образом решением уравнений, то он занимался кривыми лишь постольку, поскольку они могли помочь ему при нахождении корней уравнений; и поскольку для этой цели ему был достаточен обыкновенный анализ, он и не пытался искать какой-нибудь другой анализ. Однако он удачно воспользовался обыкновенным анализом при нахождении касательных; найденный им для этого метод показался ему столь прекрасным, что он не удержался, чтобы не сказать [b], что „эта проблема была наиболее полезной и общей не только из тех, которые он знал, но даже из тех, которые он желал бы вообще знать в геометрии“ [5]).

Так как геометрия Декарта сделала очень модным решение геометрических задач путем решения уравнений и так как она открывала широкий путь для этого, то большинство геометров устремилось сюда. Они тоже сделали здесь ряд новых открытий, которые умножаются и совершенствуются еще с каждым днем

[a] *Collect. Mathem.*, Lib. 7, initio.
[b] *Geomet.*, Liv. 2.

Что касается г. Паскаля, то он обратил свое внимание совсем в другую сторону: он стал изучать кривые сами по себе, рассматривая их как многоугольники; он определил длины некоторых кривых, обнимаемые ими площади, объемы, описываемые этими площадями, центры тяжести этих площадей и объемов и т. д. И путем одного только рассмотрения элементов этих кривых, т. е. путем рассмотрения бесконечно малых, он открыл некоторые общие методы, тем более поразительные, что он, повидимому, нашел их лишь силой своего гения, без всякой помощи анализа.

Вскоре после опубликования метода г. Декарта для нахождения касательных г. де-Ферма открыл тоже один метод, который г. Декарт под конец сам признал [a] более простым во многих случаях, чем его собственный метод [6]). Правда, он не был еще таким простым, каким сделал его впоследствии г. Барроу, более тщательно изучая свойства многоугольников, которые естественно приводят к рассмотрению маленького треугольника, образуемого частицей кривой, заключенной между двумя бесконечно близкими ординатами, разностью этих двух ординат и разностью соответствующих абсцисс [7]). Этот треугольник подобен треугольнику, образуемому касательной, ординатой и подкасательной; таким образом благодаря простому подобию этот последний метод избавляет

[a] *Lett. 71*, Tom. 3.

от производства всех тех выкладок, которых требует метод г. Декарта и которых раньше требовал и сам этот метод.

Г. Барроу [a] не ограничился этим; он придумал также особое исчисление, связанное с этим методом, но для пользования им ему пришлось, как приходилось и в методе г. Декарта, избавляться от дробей и устранять все знаки радикалов [8]).

На место этого метода стал затем метод знаменитого [b] г. Лейбница. Этот ученый геометр начал там, где закончили г. Барроу и другие геометры. Изобретенное им исчисление привело его в неизвестные до того области, в которых он сделал открытия, вызывающие изумление у самых искусных математиков Европы. Гг. Бернулли первые заметили красоту этого исчисления; они довели его до совершенства, позволившего им преодолеть такие трудности, на которые никогда бы не дерзнули раньше.

Область применения этого исчисления колоссальна: оно годится как для механических, так и для геометрических кривых [9]); его нисколько не смущают знаки радикала, оказывающиеся часто даже очень удобными; его можно применить к какому угодно количеству неопределенных [10]); для него представляется одинаково легким сравнение бесконечно малых всех родов [11]). Это дает начало бесконечному множеству поразитель-

(a) *Lect. Geomet.*, pag. 80.

(b) *Acta Erud. Lips.*, an. 1684, pag. 467.

ных открытий по вопросу о кривых и прямых касательных, по вопросам De maximis et minimis, о точках перегиба и возврата кривых, о развертках, о каустических кривых, образуемых отражением или преломлением и т. д., как это будет видно в ходе изложения предлагаемого сочинения.

Я разделил эту книгу на 10 глав. В первой содержатся принципы исчисления диференциалов [12]). Вторая глава показывает, как надо пользоваться им, чтобы найти касательные ко всякого рода кривым, независимо от количества неопределенных, содержащихся в выражающих их уравнениях, хотя г. Крэг [a] [13]) полагал, что оно неприменимо к механическим или трансцендентным кривым. Третья глава показывает, как пользоваться им для решения всякого рода вопросов De maximis et minimis, четвертая — как находить точки перегиба и возврата кривых. В пятой показывается, как пользоваться им при нахождении для всякого рода кривых разверток г. Гюйгенса. Шестая и седьмая главы показывают, как с помощью его находить каустические кривые, образующиеся как путем отражения, так и путем преломления, изобретателем которых является знаменитый г. Чиргауз, — и это опять-таки для всякого рода кривых [14]). Восьмая глава показывает, как пользоваться им для нахождения точек кривых линий, которые касаются бесконечного множества данных — прямых или кривых —

[a] *De figurarum curvilinearum quadraturis*, part. 2.

линий. В девятой главе содержится решение некоторых задач, зависящих от предыдущих открытий. А десятая глава содержит новый способ пользования исчислением диференциалов для геометрических кривых; отсюда выводится метод гг. Декарта и Гудде[15]), пригодный только для этого рода кривых.

Надо заметить, что в главах 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 имеется лишь очень мало предложений, но они все носят очень общий характер, представляя как бы методы, которыми легко воспользоваться для приложения к любому числу частных предложений. Я применяю их только на нескольких избранных примерах, ибо убежден, что в вопросах математики полезны лишь методы и что книги, излагающие только подробности или частные предложения, заставляют лишь терять время тех, кто их пишет, и тех, кто их читает. Поэтому я прибавил задачи девятой главы лишь потому, что они считаются интересными и что они носят очень общий характер. В десятой главе опять-таки изложены лишь методы, которые исчисление диференциалов сообщает способу гг. Декарта и Гудде; и если они так ограничены, то из всего предыдущего ясно, что это является не недостатком излагаемого нами исчисления, но декартова метода, которому его подчиняют. Наоборот, ничто не доказывает лучше исключительной пригодности этого исчисления, как все это многообразие методов; и при самом незначительном внимании можно убедиться, что он дает все, что можно извлечь из

метода гг. Декарта и Гудде, и что доставляемое им всеобщее доказательство употребления в последнем арифметических прогрессий не оставляет желать ничего в смысле безупречности этого последнего метода.

Я намеревался прибавить к книге еще одну главу, чтобы показать также удивительную пользу этого исчисления в физике, показать, до какой степени точности оно может довести ее и насколько от него может выиграть механика. Но болезнь помешала моему намерению; однако читатели от этого ничего не потеряют, и когда-нибудь они будут за это возмещены даже с избытком.

Во всем этом речь идет лишь о первой части исчисления г. Лейбница, заключающейся в том, чтобы переходить от конечных величин к их бесконечно малым разностям и сравнивать между собой эти бесконечно малые любого рода: эту часть называют *диференциальным исчислением*. Я также намеревался составить другую часть, которую называют *интегральным исчислением* и которая заключается в том, чтобы переходить от этих бесконечно малых к конечным величинам или целым, бесконечно малые разности которых они составляют, т. е. в том, чтобы находить суммы этих разностей. Но когда г. Лейбниц мне написал, что он работает над этим для трактата, который он называет De scientia infiniti, то я отказался от мысли лишить читающую публику столь прекрасного труда, долженствующего

заключать все наиболее любопытное в обратном методе касательных, в вопросах о спрямлении кривых, о квадратуре заключаемых ими площадей, о квадратурах поверхностей тел, описываемых этими кривыми, об объеме этих тел, об определении центров тяжести и т. д.[16]). Даже это сочинение я публикую лишь потому, что он просил меня об этом в своих письмах и что я считаю это необходимым для подготовки умов к пониманию всего того, что удастся открыть в дальнейшем по этим вопросам.

Под конец я должен признать, что я многим обязан знаниям гг. Бернулли, особенно младшего из них, состоящего в настоящее время профессором в Гронингене[17]). Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница. Поэтому я не имею ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить.

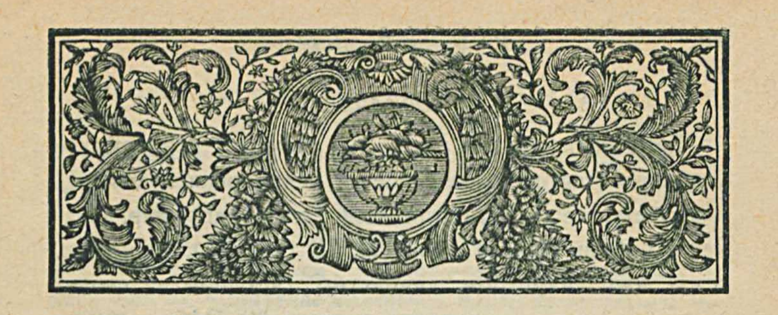
Надо воздать еще справедливость ученому г. Ньютону, справедливость, которую воздал ему и сам г. Лейбниц [a]. Он тоже нашел нечто подобное диференциальному исчислению, как это следует из отличной книги под названием Philosophiae naturalis principia Mathematica, которую он опубликовал в 1687 и которая является почти единственным примером употребления этого исчисления[18]). Но обозначение[19]) г. Лейбница делает его исчисление

[a] *Journal des Sçavans*, du 30. Août 1694.

более легким и удобным; помимо того оно оказывает удивительную помощь во многих случаях [20]).

В момент печатания последнего листа этого трактата в мои руки попала книга г. Ньювентиита. Заинтересовавшись названием книги, Analysis infinitorum, я пробежал ее, но нашел, что она сильно отличается от моего труда. Помимо того, что этот автор не пользуется вовсе обозначением г. Лейбница, он абсолютно не признает вторых, третьих и т. д. диференциалов. Так как я построил лучшую часть предлагаемого труда на этой основе, то я счел бы необходимым ответить на его возражения и показать, насколько они несостоятельны, если бы г. Лейбниц не выполнил в совершенстве этой задачи в Лейпцигских деяниях [a]. Замечу кроме того, что оба требования или допущения, которые я принимаю в начале этого трактата и только на которых он основан, кажутся мне столь очевидными, что я не допускаю, чтобы они могли оставить какое-нибудь сомнение в уме внимательных читателей [21]). Я мог бы даже их легко доказать по способу древних, если бы я не поставил себе правилом быть кратким при рассмотрении уже известных вещей и останавливаться главным образом на тех вопросах, которые новы.

(a) *Acta Erud.*, an. 1695, pag. 310 et 369.



Часть первая [22])

ОБ ИСЧИСЛЕНИИ ДИФЕРЕНЦИАЛОВ

ГЛАВА I

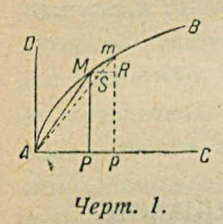
В КОТОРОЙ ПРИВЕДЕНЫ ПРАВИЛА ЭТОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Определение I

ЕРЕМЕННЫМИ величинами называют такие величины, которые непрерывно увеличиваются или уменьшаются; наоборот, *постоянными* величинами называют такие величины, которые остаются одними и теми же, в то время как другие изменяются. Таким образом в параболе ординаты и абсциссы представляют переменные величины, между тем как параметр [23]) есть величина постоянная.

Определение II.

Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее *диференциалом*. Пусть, например, дана какая-нибудь кривая линия *AMB* (черт. 1), имеющая осью или диаметром линию *AC*, а одной из своих ординат прямую [24]) *PM*; и пусть будет дана другая ордината *pm*, бесконечно близкая к первой. Теперь, если провести *MR* параллельно *AC* и хорды *AM*, *Am* и если описать из центра *A* радиусом *AM* маленькую дугу круга *MS*, то *Pp* будет диференциалом *AP*, *Rm* — диференциалом *PM*, *Sm* — диференциалом *AM* и *Mm* — диференциалом дуги *AM*. Таким же образом маленький треугольник *MAm*, имеющий основанием дугу *Mm*, будет диференциалом сегмента *AM*, а маленькая площадь *MPpm* — диференциалом площади, заключенной между прямыми *AP*, *PM* и дугой *AM*.



Черт. 1.

Следствие.

1. Очевидно, что диференциал постоянной величины есть ничто или нуль или (что то же самое) что постоянные величины не имеют диференциала.

Предупреждение.

В дальнейшем для обозначения диференциала переменной величины, которая сама выражается одной буквой, мы будем пользоваться знаком или символом d;

во избежание недоразумений этот знак d *не будет иметь иного употребления в дальнейшей части книги. Если мы обозначим, например, переменные* AP *через* x; PM *через* y; AM *через* z; *дугу* AM *через* u; *площадь* AMP, *ограниченную прямыми и кривыми линиями,* s; *и сегмент* AM *через* t, *то* dx *будет выражать значение* Pp; dy — *значение* Rm; dz — *значение* Sm; du — *значение маленькой дуги* Mm; ds — *значение маленькой площади* MPpm *и* dt — *значение маленького треугольника* MAm, *ограниченного прямыми и кривыми линиями.*

I. Требование или допущение.

2. Требуется, чтобы две величины, отличающиеся друг от друга лишь на бесконечно малую величину, можно было брать безразлично одну вместо другой или же (что то же самое), чтобы величина, которая увеличивается или уменьшается лишь на другую величину, бесконечно меньшую, чем она сама, могла быть рассматриваема, как остающаяся той же самой величиной. Требуется, например, чтобы можно было принять *Ap* за *AP*; *pm* за *PM*; площадь *Apm* — за площадь *APM*; маленькую площадь *MPpm* — за маленький прямоугольник *MPpR*; маленький сектор *AMm* — за маленький треугольник *AMS*; угол *pAm* — за угол *PAM* и т. д. [25]).

II. Требование или допущение.

3. Требуется, чтобы можно было рассматривать кривую линию как совокупность бесконечного множества бесконечно малых прямых линий, или же (что то же самое) как многоугольник с бесконечным числом беско-

нечно малых сторон, определяющих образуемыми ими между собой углами кривизну линии. Требуется, например, чтобы часть кривой Mm и дуга круга MS могли рассматриваться ввиду своей бесконечной малости как прямые линии, так чтобы маленький треугольник mSM можно было считать прямолинейным [26]).

Предупреждение.

В дальнейшем предполагается обыкновенно, что последние буквы алфавита — z, y, x *и т. д.* — *означают переменные количества, а первые буквы его* — a, b, c *и т. д.* — *означают, наоборот, постоянные величины. Таким образом, когда* x *становится* $x + dx$, *то* y, z *и т. д. становятся* $y + dy$, $z + dz$ *и т. д. (§ 1), а* a, b, c *и т. д. остаются теми же самыми* a, b, c *и т. д.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

Задача.

4. Найти *диференциал нескольких складываемых друг с другом или вычитаемых друг из друга величин.*

Пусть требуется найти диференциал $a + x + y - z$. Если предположить, что x увеличивается на бесконечно малую часть, т. е. что она становится $x + dx$, то y станет тогда $y + dy$, z станет $z + dz$. Что касается постоянной a, то (*§ 1*) она останется той же самой a, так что заданная величина $a + x + y - z$ станет $a + x + dx + y + dy - z - dz$, а диференциал, который мы получим, вычитая заданную величину из последней величины, будет $dx + dy - dz$. Так же обстоит дело и в других случаях. Это дает нижеследующее правило.

Правило I.

ДЛЯ СКЛАДЫВАЕМЫХ ДРУГ С ДРУГОМ ИЛИ ВЫЧИТАЕМЫХ ДРУГ ИЗ ДРУГА ВЕЛИЧИН.

Надо взять диференциал каждого члена заданной величины и, сохраняя прежние знаки, составить из них другую величину, которая и будет искомым диференциалом [27].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

ЗАДАЧА.

5. НАЙТИ *диференциал произведения нескольких умноженных друг на друга величин.*

1) Диференциал xy есть

$$y\,dx + x\,dy.$$

Действительно, когда x становится $x + dx$, то y становится $y + dy$, и, следовательно, xy становится тогда

$$xy + y\,dx + x\,dy + dx\,dy,$$

что представляет собой произведение $x + dx$ на $y + dy$; диференциал будет тогда

$$y\,dx + x\,dy + dx\,dy,$$

т. е. (§ 2)

$$y\,dx + x\,dy,$$

ибо $dx\,dy$ есть величина, бесконечно малая по сравнению с другими членами $y\,dx$ и $x\,dy$. Действительно, если разделить, например, $y\,dx$ и $dx\,dy$ на dx, то мы найдем, с одной стороны, y, а с другой, dy, являющийся диференциалом y и, следовательно, беско-

нечно меньший, чем он. Отсюда следует, что диференциал произведения двух величин равняется произведению диференциала первой из этих величин на вторую плюс произведение диференциала второй величины на первую.

2) Диференциал xyz есть

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

Действительно, если рассматривать произведение xy как одну величину, то надо по вышедоказанному взять произведение ее диференциала $y\,dx + x\,dy$ на вторую величину z (что даст $yz\,dx + xz\,dy$) плюс произведение диференциала dz второй величины z на первую xy (что даст $xy\,dz$); следовательно, диференциал xyz равняется

$$yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz.$$

3) Диференциал $xyzu$ есть

$$uyz\,dx + uxz\,dy + uxy\,dz + xyz\,du.$$

Для доказательства этого, как и предыдущего, случая произведение xyz рассматривается как одна величина. Так же обстоит дело и во всех других случаях до бесконечности. Отсюда получается нижеследующее правило.

Правило II.

Для перемножаемых величин.

Диференциал произведения нескольких перемножаемых друг с другом величин равняется сумме произведений диференциала каждой из этих величин на произведение остальных величин.

Таким образом диференциал ax есть

$$x0 + a\,dx,$$

т. е. $a\,dx$. Диференциал $\overline{a+x} \times \overline{b-y}$ есть

$$b\,dx - y\,dx - a\,dy - x\,dy$$ [28]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

Задача.

6. Найти *диференциал любой дроби.*

Диференциал $\frac{x}{y}$ есть

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}.$$

Действительно, если предположить, что $\frac{x}{y} = z$, то $x = yz$, и так как эти две переменных величины x и yz должны быть всегда равны друг другу независимо от того, увеличиваются ли они или уменьшаются, то отсюда следует, что их диференциалы, т. е. их приращения или уменьшения, будут тоже равны между собой. Следовательно (*§ 5*), мы будем иметь:

$$dx = y\,dz + z\,dy$$

и

$$dz = \frac{dx - z\,dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy},$$

если подставить вместо z его значение $\frac{x}{y}$ [29]). Что и требовалось и т. д. Отсюда получается нижеследующее правило.

Правило III.

Для делящихся друг на друга величин или для дробей.

Диференциал любой дроби равняется произведению диференциала числителя на знаменатель минус произведение диференциала знаменателя на числитель; все это — деленное на квадрат знаменателя.

Так, например, диференциал $\frac{a}{x}$ равняется $\frac{-a\,dx}{xx}$; диференциал $\frac{x}{a+x}$ равняется $\frac{a\,dx}{aa+2ax+xx}$ [30]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

Задача.

7. Найти *диференциал любой совершенной или несовершенной степени какой-нибудь переменной величины.*

Чтобы дать общее правило, пригодное для совершенных и несовершенных [31]) степеней, необходимо объяснить аналогию, существующую между их показателями.

Если взять геометрическую прогрессию, первый член которой единица, а второй — какая-нибудь величина x, и если расположить по порядку под каждым членом его показатель, то ясно, что показатели эти составят арифметическую прогрессию.

Геом. прогр. $1, x, xx, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7$ и т. д.
Арифм. прогр. $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ и т. д.

Если продолжить геометрическую прогрессию ниже единицы, а арифметическую ниже нуля, то члены

последней будут показателями тех членов, которым они соответствуют в геометрической прогрессии. Так, например, —1 есть показатель $\frac{1}{x}$, —2 есть показатель $\frac{1}{xx}$ и т. д.

Геом. прогр. x, 1, $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$ и т. д.

Арифм. прогр. 1, 0, —1, —2, —3, —4 и т. д.

Если ввести в геометрическую прогрессию какой-нибудь новый член, то для получения его показателя придется ввести соответствующий член в арифметическую прогрессию.

Так, например, $\sqrt{x}$ будет иметь показателем $\frac{1}{2}$;

$\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{3}$; $\sqrt[5]{x^4}$, $\frac{4}{5}$; $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$, $-\frac{3}{2}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$, $-\frac{5}{3}$; $\frac{1}{\sqrt{x^7}}$, $-\frac{7}{2}$ и т. д., так что эти выражения $\sqrt{x}$ и $x^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x}$ и $x^{\frac{1}{3}}$, $\sqrt[5]{x^4}$ и $x^{\frac{4}{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ и $x^{-\frac{3}{2}}$ и т. д. означают одну и ту же вещь.

Геометрическая прогрессия

$1, \sqrt{x}, x.\ 1, \sqrt[3]{x}, \sqrt[3]{xx}, x.\ 1, \sqrt[5]{x}, \sqrt[5]{xx}, \sqrt[5]{x^3}, \sqrt[5]{x^4}, x.$

Арифметическая прогрессия

$0, \frac{1}{2}\ 1.\ 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1.\ 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1=\frac{5}{5}.$

Геометрическая прогрессия

$$\frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt{x^3}},\ \frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}},\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}},\frac{1}{xx}.\ \frac{1}{x^3},\ \frac{1}{\sqrt{x^7}},\ \frac{1}{x^4}.$$

Арифметическая прогрессия

$$-1,\ -\frac{3}{2},\ -2.\ -1,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{5}{3},\ -2.\ -3,\ -\frac{7}{2},\ -4.$$

Отсюда ясно, что, подобно тому как $\sqrt{x}$ есть геометрическая средняя между 1 и x, точно так же $\frac{1}{2}$ есть арифметическая средняя между их показателями 0 и 1; и подобно тому как $\sqrt[3]{x}$ есть первая из двух геометрических средних пропорциональных между 1 и x, точно так же $\frac{1}{3}$ есть первая из двух арифметических средних пропорциональных между их показателями 0 и 1 [32]). Так же обстоит дело и в других случаях. Из сущности этих двух прогрессий следует:

1) Что сумма показателей двух любых членов геометрической прогрессии будет показателем члена, представляющего их произведение. Так, например, x^{4+3}, или x^7, есть произведение x^3 на x^4, и $x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}$, или $x^{\frac{5}{6}}$, есть произведение $x^{\frac{1}{2}}$ на $x^{\frac{1}{3}}$; и $x^{-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}$, или $x^{-\frac{2}{15}}$, есть произведение $x^{-\frac{1}{3}}$ на $x^{\frac{1}{5}}$ и т. д. Таким же точно образом $x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}$, или $x^{\frac{2}{3}}$, есть произведение $x^{\frac{1}{3}}$ на самого себя, т. е.

его квадрат, и x^{+2+2+2}, или x^6, есть произведение x^2 на x^2 на x^2, т. е. его куб, и $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}}$, или $x^{-\frac{4}{3}}$, есть четвертая степень $x^{-\frac{1}{3}}$; то же самое относится к другим степеням. Отсюда ясно, что удвоенный, утроенный и т. д. показатель какого-нибудь члена геометрической прогрессии есть показатель квадрата, куба и т. д. этого члена; и значит, что половина, треть и т. д. показателя какого-нибудь члена геометрической прогрессии есть показатель квадратного, кубического и т. д. корня этого члена.

2) Что разность показателей двух каких-нибудь членов геометрической прогрессии будет показателем частного от деления этих членов. Так, например, $x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}}$ будет показателем частного от деления $x^{\frac{1}{2}}$ на $x^{\frac{1}{3}}$, и $x^{-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=x^{-\frac{7}{12}}$ будет показателем частного от деления $x^{-\frac{1}{3}}$ на $x^{\frac{1}{4}}$; отсюда ясно, что умножить $x^{-\frac{1}{3}}$ на $x^{-\frac{1}{4}}$ — все равно, что разделить $x^{-\frac{1}{3}}$ на $x^{\frac{1}{4}}$. Так же обстоит дело и в других случаях. Теперь могут иметь место два различных случая.

Первый случай, — когда степень совершенная, т. е. когда показатель ее целое число. Диференциал xx есть $2x\,dx$, диференциал x^3 есть $3xx\,dx$, диференциал x^4 есть $4x^3\,dx$ и т. д. Действительно, так как

квадрат x есть не что иное, как произведение x на x, то его диференциал (*§ 5*) будет $x\,dx + x\,dx$, т. е. $2x\,dx$. Таким же образом, так как куб x есть не что иное, как произведение x на x на x, то его диференциал (*§ 5*) будет $xx\,dx + xx\,dx + xx\,dx$, т. е. $3xx\,dx$. Так как то же самое относится ко всем степеням до бесконечности, то отсюда следует, что если предположить, что m означает любое целое число, то диференциал x^m будет $mx^{m-1}\,dx$.

Если показатель отрицательный, то мы найдем, что диференциал x^{-m}, или $\frac{1}{x^m}$, будет:

$$\frac{-mx^{m-1}\,dx}{x^{2m}} = -mx^{-m-1}dx.$$

Второй случай встречается, когда степень несовершенная, т. е. когда ее показатель дробное число. Пусть требуется найти диференциал $\sqrt[n]{x^m}$, или $x^{\frac{m}{n}}$ $\left(\frac{m}{n}\text{ выражает любое дробное число}\right)$; примем $x^{\frac{m}{n}} = z$. Возведя каждую сторону [этого равенства] в степень n, мы получим $x^m = z^n$; взяв диференциалы, как было указано в первом случае, мы найдем:

$$mx^{m-1}dx = nz^{n-1}dz$$

и

$$dz = \frac{mx^{m-1}\,dx}{nz^{n-1}} = \frac{m}{n}\,x^{\frac{m}{n}-1}\,dx,$$

или

$$\frac{m}{n}\,dx\sqrt[n]{x^{m-n}},$$

если подставить вместо nz^{n-1} его значение $nx^{m-\frac{m}{n}}$. Если показатель отрицателен, то мы найдем, что диференциал $x^{-\frac{m}{n}}$, или $\frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$, будет:

$$\frac{-\frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}dx}{x^{\frac{2m}{n}}}=-\frac{m}{n}x^{-\frac{m}{n}-1}dx.$$

Отсюда вытекает следующее общее правило.

Правило IV.

Для совершенных или несовершенных степеней.

Диференциал любой совершенной или несовершенной степени какой-нибудь переменной величины равняется произведению показателя этой степени на саму эту величину, возведенную в степень, на единицу меньшую, и помноженную на ее диференциал.

Итак, если предположить, что m выражает любое целое или дробное, положительное или отрицательное число, а x — произвольную переменную величину, то диференциал x^m будет всегда $mx^{m-1}dx$ [33].

ПРИМЕРЫ.

Диференциал куба $ay-xx$, т. е. $\overline{ay-xx}^3$, равняется

$$3\times\overline{ay-xx}^2\times\overline{ady-2xdx}=$$

$$=3a^3yydy-6aaxxydy+3ax^4dy-6aayyxdx+$$

$$+12ayx^3dx-6x^5dx,$$

Диференциал $\sqrt{xy+yy}$, или же $\overline{xy+yy}^{\frac{1}{2}}$, равняется

$$\frac{1}{2}\times\overline{xy+yy}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{y\,dx+x\,dy+2y\,dy},$$

или

$$\frac{y\,dx+x\,dy+2y\,dy}{2\sqrt{xy+yy}}.$$

Диференциал $\sqrt{a^4+axyy}$, или $\overline{a^4+axyy}^{\frac{1}{2}}$, равняется

$$\frac{1}{2}\times\overline{a^4+axyy}^{-\frac{1}{2}}\times\overline{ayy\,dx+2axy\,dy},$$

или

$$\frac{ayy\,dx+2axy\,dy}{2\sqrt{a^4+axyy}}.$$

Диференциал $\sqrt[3]{ax+xx}$, или $\overline{ax+xx}^{\frac{1}{3}}$, равняется

$$\frac{1}{3}\times\overline{ax+xx}^{-\frac{2}{3}}\times\overline{a\,dx+2x\,dx},$$

или

$$\frac{a\,dx+2x\,dx}{3\sqrt[3]{\overline{ax+xx}^2}}.$$

Диференциал $\sqrt{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}$, или $\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{\frac{1}{2}}$, равняется

$$\frac{1}{2}\times\overline{ax+xx+\sqrt{a^4+axyy}}^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\overline{a\,dx+2x\,dx+\frac{ayy\,dx+2axy\,dx}{2\sqrt{a^4+axyy}}},$$

или

$$\frac{a\,dx + 2x\,dx}{2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}} +$$

$$+ \frac{ayy\,dx + 2axy\,dy}{2\sqrt{a^4 + axyy} \times 2\sqrt{ax + xx + \sqrt{a^4 + axyy}}}.$$

Диференциал $\frac{\sqrt[3]{ax + xx}}{\sqrt{xy + yy}}$ будет согласно этому правилу (*§ 7, 6*) и согласно правилу о дробях[34])

$$\frac{\frac{a\,dx + 2x\,dx}{3\sqrt[3]{ax + xx}} \times \sqrt{xy + yy}\ \frac{-y\,dx - x\,dy - 2y\,dy}{2\sqrt{xy + yy}} \times \sqrt[3]{ax + xx}}{xy + yy}.$$

Замечание.

8. Уместно заметить, что, беря диференциалы, мы всегда предполагали, что, вместе с возрастанием одной из переменных x, и другие переменные y, z и т. д. тоже возрастают, т. е. если x становится $x + dx$, то y, z становятся $y + dy$, $z + dz$ и т. д. Поэтому, если случится, что некоторые из переменных уменьшаются, в то время как другие возрастают, то их диференциалы надо будет рассматривать как величины отрицательные по отношению к диференциалам других величин, которые по предложению возрастают; и, следовательно, надо будет изменить знаки тех членов, в которых встречаются диференциалы уменьшающихся величин. Так, например, если предположить, что с возрастанием x величины y и z уменьшаются,

т. е. что когда x станет $x+dx$, то y и z становятся $y-dy$, $z-dz$, и если надо взять диференциал произведения xyz, то в найденном (§ 5) диференциале

$$xy\,dz+xz\,dy+yz\,dx$$

надо изменить знаки членов, в которых встречаются dy и dz. Таким образом искомый диференциал равняется

$$yz\,dx-xy\,dz-xz\,dy.$$

ГЛАВА II

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НАХОЖДЕНИЮ КАСАТЕЛЬНЫХ КО ВСЯКОГО РОДА КРИВЫМ ЛИНИЯМ

Определение.

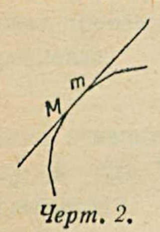
ЕСЛИ продолжить одну из маленьких сторон Mm (черт. 2) многоугольника, составляющего (§ 3) кривую линию, то эта продолженная таким образом маленькая сторона будет называться *касательной* к кривой в точке M или m [35]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

Задача.

9. Пусть *кривая линия* AM (черт. 3) *такова, что отношение абсциссы* AP *к ординате* PM *выражается каким-либо уравнением, и пусть требуется провести в данной точке* M *этой кривой касательную* MT.

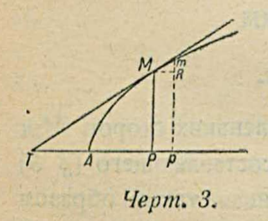
Проведем ординату MP и предположим, что прямая MT, встречающая диаметр в точке T, есть искомая касательная. Представим себе другую ординату mp, бесконечно близкую к первой, и проведем маленькую прямую MR, параллельную AP. Обозначим данные AP через x; PM через y (следовательно, Pp или $MR = dx$ и $Rm = dy$); в таком случае подобные треугольники mRM и MPT дадут:



Черт. 2.

$$mR\,(dy) \,.\, RM\,(dx) : : MP\,(y) \,.\, pT = \frac{y\,dx}{dy}\ ^{36}).$$

Но при помощи диференциала данного уравнения мы найдем значение dx, выраженное в членах, которые все содержат множитель dy [37]); если это выражение умножить на y и разделить на dy, то получится значение подкасательной PT [38]), выраженное во вполне известных и свободных от диференциалов членах; это значение и послужит для проведения искомой касательной MT.

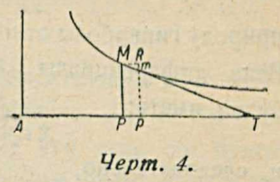


Черт. 3.

Замечание.

10. Когда точка T (черт. 4) оказывается со стороны, противоположной A, началу x-ов, то ясно, что с возрастанием x величина y уменьшается и что, следовательно (*§ 8*), в диференциале данного уравнения надо изменить знаки всех членов, в которых

встречается dy, иначе значение dx, выраженное в dy, будет отрицательным, и, следовательно, отрицательным будет так же значение $PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$. Однако, чтобы не запутаться, лучше брать диференциал данного уравнения согласно указанным правилам (гл. *I*), не изменяя в них ничего.



Черт. 4.

Действительно, если в конце операции окажется, что значение PT положительно, то отсюда будет следовать, что надо взять точку T с той же стороны, что и точка A, начало x-ов, как мы это предположили, производя вычисления; наоборот, если оно отрицательно, то точку придется взять с противоположной стороны. Это выяснится на нижеследующих примерах.

Пример I.

11. 1) Если отношение AP к PM (черт. 3) выражается уравнением $ax = yy$, то кривая AM будет параболой, имеющей параметром данную прямую a; взяв диференциалы обеих сторон уравнения, мы будем иметь:

$$a\,dx = 2y\,dy,\quad dx = \frac{2y\,dy}{a}$$

и

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = \frac{2yy}{a} = 2x,$$

если подставить вместо yy его значение dx. Отсюда следует, что если взять PT равным двум AP, и если

провести прямую MT, то она будет касательной в точке M. А это и требовалось сделать.

2) Пусть дано уравнение $aa = xy$, выражающее природу гиперболы относительно асимптот [39]) (черт. 4). Взяв диференциалы [обеих сторон уравнения], мы будем иметь:

$$x\,dy + y\,dx = 0$$

и, следовательно,

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = -x.$$

Отсюда следует, что если отложить $PT = PA$ со стороны, противоположной точке A, и провести прямую MT, то она будет касательной в точке M.

3) Пусть дано общее уравнение $y^m = x$, выражающее собой природу всего бесконечного множества парабол [40]), когда показатель m есть положительное целое или дробное число, и всех гипербол, когда этот показатель есть отрицательное число [41]). Взяв диференциалы [обеих сторон], получим:

$$my^{m-1}\,dy = dx$$

и, следовательно,

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = my^m = mx,$$

если подставить вместо y^m его значение x.

Если $m = \frac{3}{2}$, то уравнение будет $y^3 = axx$ и будет выражать собой природу одной из кубических парабол [42]); подкасательная $PT = \frac{3}{2}x$. Если

$m = -2$, то уравнение будет $a^3 = xyy$ и будет выражать собой природу одной из кубических гипербол; подкасательная $PT = -2x$. Так же обстоит дело и в других случаях.

Чтобы провести в параболах касательную в точке A начале x-ов, надо найти отношение dx к dy для этой точки; действительно ясно, что если мы будем знать это отношение, то тем самым будет определен и угол, образуемый касательной с осью или диаметром. В этом примере мы имеем:

$$dx . dy : : my^{m-1} . 1.$$

Так как y равно нулю в точке A, то отсюда ясно, что отношение dy к dx должно здесь быть бесконечно большим, когда m больше 1, и бесконечно малым, когда оно меньше 1, т. е. что касательная в A должна быть параллельной ординатам в первом случае и сливаться с диаметром во втором.

Пример II.

12. Пусть кривая AMB (черт. 5) такова, что

$$AP \times PB (x \times \overline{a-x}) \cdot \overline{PM}^2 (yy) : : AB (a) . AD (b);$$

Черт. 5.

Значит

$$\frac{ayy}{b} = ax - xx \text{ [43]},$$

и, если продиференцировать [44],

$$\frac{2ay\,dy}{b} = a\,dx - 2x\,dx.$$

Отсюда

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=\frac{2ayy}{ab-2bx}=\frac{2ax-xx}{a-2x},$$

если подставить вместо $\frac{ayy}{b}$ его значение $ax-xx$, и

$$PT-AP \text{ или } AT=\frac{ax}{a-2x}.$$

Предполагая теперь, что

$$\overline{AP}^3\times\overline{PB}^2(x^3\times\overline{a-x}^2)\,\overline{PM}^5(y^5)::AB(a).AD(b),$$

получим:

$$\frac{ay^5}{b}=x^3\times\overline{a-x}^2$$

и, продиференцировав,

$$\frac{5ay^4\,dy}{b}=3xx\,dx\times\overline{a-x}^2-\overline{2a\,dx+2x\,dx}\times x^3,$$

откуда

$$\frac{y\,dx}{dy}=\frac{5x^3\times\overline{a-x}^2}{3xx\times\overline{a-x}^2-\overline{2a+2x}\times x^3}=\frac{5x\times\overline{a-x}}{3a-3x-2x}$$

или

$$\frac{5ax-5xx}{3a-5x}$$

и

$$AT=\frac{2ax}{3a-5x}.$$

Вообще, если m обозначает показатель степени AP, а n — показатель степени PB, то получается общее уравнение всего бесконечного множества эллипсов [45]):

$$\frac{ay^{m+n}}{b}=x^m\times\overline{a-x}^n$$

диференциал которого

$$\frac{\overline{m+n}\,ay^{m+n-1}\,dy}{b}=mx^{m-1}dx\times\overline{a-x}^{\,n}-$$

$$-n\overline{a-x}^{\,n-1}dx\times x^{m}.$$

Отсюда (если подставить вместо $\frac{ay^{m+n}}{b}$ его значение $x^m\times\overline{a-x}^{\,n}$) получается:

$$PT\left(\frac{ydx}{dy}\right)=\frac{\overline{m+n}x^{m}\times\overline{a-x}^{\,n}}{mx^{m-1}\times\overline{a-x}^{\,n}-n\overline{a-x}^{\,n-1}\times x^{m}}=$$

$$=\frac{\overline{m+n}x\times\overline{a-x}}{m\overline{a-x}-nx},$$

или

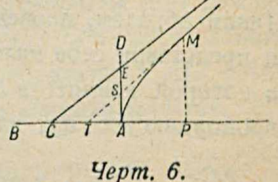
$$PT=\frac{\overline{m+n}\times\overline{ax-xx}}{ma-\overline{m-n}x}\ \text{ и }\ AT=\frac{nax}{ma-\overline{m-n}x}.$$

Пример III.

13. Предполагая те же условия, что и в предыдущем примере, с тою лишь разницей, что точки B и P (черт. 6) находятся по разным сторонам точки A, получим уравнение:

$$\frac{ay^{m+n}}{b}=x^m\times\overline{a+x}^{\,n},$$

выражающее природу всех гипербол, рассматриваемых по отношению к своим диаметрам. Отсюда, как и прежде, получим:



Черт. 6.

$$PT=\frac{\overline{m+n}\times\overline{ax+xx}}{ma+\overline{m+n}x}\ \text{ и }\ AT=\frac{nax}{ma+\overline{m+n}x}.$$

Если предположить AP бесконечно большим, то касательная TM пересечется с кривой только бесконечно далеко, т. е. она обратится в асимптоту CE; в этом случае:

$$AT\left(\frac{nax}{ma+\overline{m+nx}}\right)=\frac{n}{m+n}a=AC,$$

ибо, поскольку a бесконечно меньше, чем x, член ma будет бесконечно мал по сравнению с $\overline{m+nx}$. По той же причине уравнение кривой в этом случае обратится в

$$ay^{m+n}=bx^{m+n}.$$

Полагая для краткости $m+n=p$ и извлекая из обеих частей равенства корень [степени] p, получим:

$$y\sqrt[p]{a}=x\sqrt[p]{b},$$

диференциал чего есть

$$dy\sqrt[p]{a}=dx\sqrt[p]{b}.$$

Таким образом, проведя AE параллельно ординатам и представив себе маленький треугольник при точке, в которой асимптота CE встречает кривую, получим пропорцию $dx \,.\, dy$, или

$$\sqrt[p]{a}\,.\,\sqrt[p]{b}::AC\left(\frac{n}{p}a\right).\,AE=\frac{n}{p}\sqrt[p]{ba^{p-1}}.$$

Определив таким образом величины CA и AE, можно провести бесконечную прямую CE, которая будет искомой асимптотой.

При $m=1$ и $n=1$ кривая будет обыкновенной гиперболой, и $AC=\frac{1}{2}a$, $AE=\frac{1}{2}\sqrt{ab}$, т. е. половине сопряженного диаметра, что, как известно, согласуется с действительностью [46]).

Пример IV.

14. Пусть уравнение

$$y^3-x^3=axy$$

($AP=x$, $PM=y$, a — данная прямая линия) выражает природу кривой AM (черт. 6). Его диференциал

$$3yy\,dy-3xx\,dx=ax\,dy+ay\,dx.$$

Значит

$$\frac{y\,dx}{dy}=\frac{3y^3-axy}{3xx+ay},$$

и

$$AT\left(\frac{y\,dx}{dy}-x\right)=\frac{3y^3-3x^3-2axy}{3xx+ay}=\frac{axy}{3xx+ay},$$

если подставить вместо $3y^3-3x^3$ его значение $3axy$.

Если теперь предположить, что AP и PM каждая бесконечно велики, касательная TM обратится в асимптоту CE, а прямые AT и AS обратятся в AC и AE, которые определяют положение асимптоты. Итак, AT, которую я назову $t=\frac{axy}{3xx+ay}$, откуда

$$y=\frac{3txx}{ax-at}=\frac{3tx}{a},$$

когда AT обращается в AC, потому что при этом at

ничто по сравнению с ax. Подставляя эту величину $\frac{3tx}{a}$ вместо y в $y^3 - x^3 = axy$, получим:

$$27t^3x^3 - a^3x^3 = 3a^3txx,$$

откуда (отбрасывая член $3a^3txx$, так как при бесконечно большом x он есть ничто по сравнению с двумя другими: $27t^3x^3$ и a^3x^3)

$$AC\,(t) = \frac{1}{3}a.$$

Точно так же AS $\left(y - \frac{xdy}{dx}\right)$, которое я называю $s = \frac{axy}{3yy - ax}$, а отсюда

$$x = \frac{3syy}{ay + as} = \frac{3sy}{a},$$

так как при y, бесконечно большом по сравнению с s, член as будет ничем по сравнению с членом ay. Подставляя эту величину в уравнение кривой, найдем:

$$AE\,(s) = \frac{1}{3}a.$$

Отсюда следует, что если взять каждую из линий AC и AE равной $\frac{1}{3}$ a и провести бесконечную прямую CE, то она будет асимптотой кривой AM.

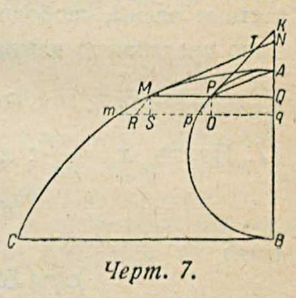
Этими двумя последними примерами надо руководствоваться при нахождении асимптот других кривых [47].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

Задача.

15. Допустим *в предыдущем предложении, что абсциссы* AP (черт. 7) *суть отрезки кривой, касательные которой* PT *известны, и что надо в данной точке* M *на кривой* AM *провести касательную* MT.

Проведя ординату MP и касательную PT и предполагая, что прямая MT, пересекающаяся с ней в T, есть искомая касательная, представим себе другую ординату mp, бесконечно близкую к первой, и маленькую прямую MR, параллельную PT. Обозначив данные AP через x, PM через y, получим, как и прежде, Pp или $MR = dx, Rm = dy$;



Черт. 7.

а подобные треугольники mRM и MPT дадут:

$$mR\,(dy) \,.\, RM\,(dx) :: MP\,(y) \,.\, PT = \frac{y\,dx}{dy}.$$

Остальное получается на основании уравнения, которое выражает зависимость между абсциссами $AP(x)$ и ординатами $PM(y)$, как мы это уже видели в предыдущих примерах и еще увидим в последующих [48]).

Пример I.

16. Пусть $\frac{yy}{x} = \frac{x\sqrt{aa+yy}}{a}$; диференциал этого будет:

$$\frac{2xy\,dy - yy\,dx}{xx} = \frac{dx\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{xy\,dy}{a\sqrt{aa+yy}},$$

или, приводя это равенство к виду пропорции:

$$dy \,.\, dx\,(MP \,.\, PT) ::$$

$$:: \frac{\sqrt{aa+yy}}{a} + \frac{yy}{xx} \,.\, \frac{2xy}{xx} - \frac{xy}{a\sqrt{aa+yy}}.$$

Следовательно, отношение данной MP к искомой подкасательной PT выразится через вполне известные члены, свободные от диференциалов. Что и было предложено найти.

Пример II.

17. Пусть $x = \frac{ay}{b}$; диференциал этого будет:

$$dx = \frac{a\,dy}{b};$$

тогда

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = \frac{ay}{b} = x.$$

Если предположить, что кривая APB есть полукруг и что ординаты MP, продолженные до Q, перпендикулярны к диаметру AB, то кривая AMC будет полурулеттой или циклоидой: простой, когда $b = a$, удлиненной, когда b больше a, и укороченной, когда — меньше [49]).

Следствие.

18. Я утверждаю, что если в случае простой циклоиды провести хорду AP, то она окажется параллельной касательной MT.

Действительно, в этом случае треугольник MPT становится равнобедренным, и внешний угол TPQ

будет равен удвоенному противолежащему ему внутреннему углу TMQ. Но угол APQ равен углу APT, так как оба они измеряются половиной дуги AP, и следовательно, он равен половине угла TPQ. Стало быть углы TMQ и APQ равны между собой, и значит линии MT и AP параллельны.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

Задача.

19. Пусть AP — *какая-либо кривая* (черт. 7) *с диаметром* KNAQ, *касательные которой* PK *известны; и пусть* AM — *другая кривая, такая, что если провести как угодно ординату* MQ, *пересекающую первую кривую в точке* P, *то соотношение между дугой* AP *и ординатой* MQ *выразится некоторым уравнением. Требуется из данной точки* M *провести касательную* MN.

Обозначив данные PK через t, KQ через s, дугу AP через x, MQ через y, получим (проводя другую ординату mq, бесконечно близкую к MQ, и линии PO и MS, параллельные AQ):

$$Pp = dx;\ mS = dy.$$

Из подобия треугольников KPQ и PpO, mSM и MQN следует:

$$PK(t).\ KQ(s) :: Pp(dx).PO \quad \text{или} \quad MS = \frac{s\,dx}{t}$$

и

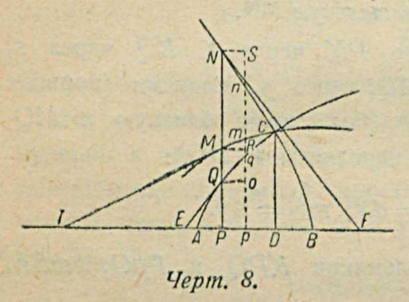
$$mS(dy).SM\left(\frac{s\,dx}{t}\right) :: MQ(y).QN = \frac{sy\,dx}{t\,dy}.$$

При помощи диференцирования данного уравнения величина dx выразится через члены, каждый из которых содержит в качестве множителя dy; следовательно, если подставить эту величину вместо dx в $\frac{sy\,dx}{t\,dy}$, то dy сократится и величина искомой подкасательной QN выразится через известные члены (termes). Что и требовалось найти.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

Задача.

20. Пусть *две кривые линии* AQC *и* BCN (черт. 8) *имеют диаметром прямую* TEABF, *и касательные* QE *и* NF *известны; пусть кроме того другая кривая линия* MC *такова, что соотношение между ординатами* MP, QP *и* NP *выражается некоторым уравнением. Требуется из данной точки* M *на этой последней кривой провести к ней касательную* MT.



Черт. 8.

Представив себе при точках Q, M и N малые треугольники Qoq, MRm и NSn и обозначив известные PE через s, PF через t, PQ через x, PM через y и PN через z, получим $oq = dx$, $Rm = dy$, $Sn = -dz$, так как, при возрастании x и y, z убывает (§ 8). Из подобия треугольников QPE и qoQ, NPF

и nSN, MPT и mRM получим:

$$QP(x) \,.\, PE(s) ::$$

$$:: qo(dx) \,.\, oQ \text{ или } MR \text{ или } SN = \frac{s\,dx}{x};$$

и

$$NP(z) \,.\, PF(t) :: nS\,(-dz) \,.\, SN = \frac{-t\,dz}{z} = \frac{s\,dx}{x}$$

$\left(\text{откуда } dz = \frac{-sz\,dx}{tx}\right)$ и

$$mR(dy) \,.\, RM\left(\frac{s\,dx}{x}\right) :: MP(y) \,.\, PT = \frac{sy\,dx}{x\,dy}.$$

Если же в диференциал данного уравнения подставить вместо dz его значение $\frac{-sz\,dx}{tx}$, то мы найдем выражение величины dx через dy; при подстановке этого выражения в $\frac{sy\,dx}{x\,dy}$, dy сократится, и величина подкасательной PT выразится через известные члены.

Пример.

21. Пусть $yy = xz$. Диференциал этого будет:

$$2y\,dy = z\,dx + x\,dz = \frac{tz\,dx - sz\,dx}{t},$$

если подставить вместо dz его отрицательное значение $\frac{-sz\,dx}{tx}$. Отсюда

$$dx = \frac{2ty\,dy}{tz - sz}$$

и, следовательно,

$$PT\left(\frac{sy\,dx}{x\,dy}\right) = \frac{2styy}{txz - sxz} = \frac{2st}{t - s},$$

если подставить вместо yy его значение xz.

Пусть теперь дано общее уравнение $y^{m+n} = x^m z^n$, диференциал которого будет:

$$\overline{m+n}\,y^{m+n-1}\,dy = mz^n x^{m-1}\,dx + nx^m z^{n-1}\,dz =$$

$$= \frac{mtz^n x^{m-1}\,dx - nsz^n x^{m-1}\,dx}{t},$$

если подставить вместо dz его значение $\frac{-sz\,dx}{tx}$. Отсюда

$$PT\left(\frac{sy\,dx}{x\,dy}\right) = \frac{\overline{mst+nst}\;y^{m+n}}{mtz^n x^m - nsz^n x^m} = \frac{mst+nst}{mt-ns},$$

если подставить вместо y^{m+n} его значение $x^m z^n$.

Можно заметить, что если кривые AQC и BCN обращаются в прямые линии, кривая MC становится одним из всего бесконечного множества конических сечений, а именно: эллипсом, когда ордината CD, выходящая из точки пересечения C, попадает между концами A и B; гиперболой, — когда она попадет с какой-либо стороны от них; и наконец параболой, — когда один из концов A и B бесконечно удален от другого, т. е. когда одна из прямых CA или CB параллельна диаметру AB [50]).

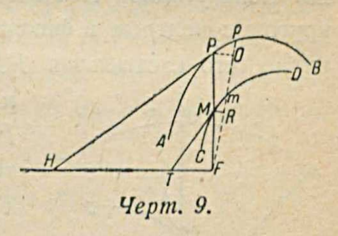
ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.

Задача.

22. Пусть *кривая* APB (черт. 9) *имеет фиксированное и неизменное начало в точке* A, *и касательные* PH *этой кривой известны. Пусть далее имеются вне этой кривой другая фиксированная точка* F *и другая кри-*

вая CMD, *такая, что если провести произвольную прямую* FMP, *то отношение ее части* FM *к отрезку кривой* AP *выражается каким-либо уравнением. Предлагается провести из данной точки* M *касательную* MT.

Восстановим к FP перпендикуляр FH, который пересекается с данной касательной PH в точке H, а с искомой MT в точке T; затем представим себе прямую $FRmOp$, образующую с FP бесконечно малый угол, и опишем из центра F малые круговые дуги PO и MR. Маленький треугольник pOP будет подобен прямоугольному треугольнику PFH, потому что углы HPF и HpF (§ 2) равны, ибо они разнятся между собою на угол PFp, который по предположению бесконечно мал; кроме того угол pOP — прямой, так как касательная в O (которая есть не что иное, как продолжение малой дуги PO, рассматриваемой как прямая) перпендикулярна к радиусу FO. По тем же соображениям подобны и треугольники mRM и MFT. Ясно, что малые треугольники, или секторы, FPO и FMR тоже подобны между собой. Поэтому, обозначив известные PH через t, HF через s, FM через y, FP через z и дугу AP через x, получим:



Черт. 9.

$$PH(t) \,.\, HF(s) :: Pp\,(dx) \,.\, PO = \frac{s\,dx}{t};$$

и

$$FP(z) \,.\, FM(y) :: PO\left(\frac{s\,dx}{t}\right) . \, MR = \frac{ys\,dx}{tz};$$

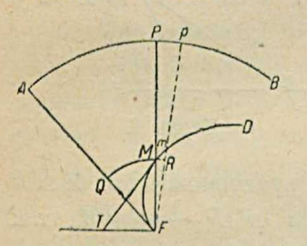
и

$$mR(dy) \cdot RM\left(\frac{sy\,dx}{tz}\right) :: FM(y) \cdot FT = \frac{syy\,dx}{tz\,dy}.$$

Остальное получается посредством диференцирования данного уравнения.

Пример.

23. Если угодно, чтобы кривая APB (черт. 10) была кругом с центром в фиксированной точке F, то очевидно, что касательная PH становится параллельной и равной подкасательной FH, так как HP становится тоже перпендикулярной к PF. Таким образом в этом случае



Черт. 10.

$$FT = \frac{yy\,dx}{z\,dy} = \frac{yy\,dx}{a\,dy},$$

если обозначить отрезок FP (z) через a, ибо он из переменного стал теперь постоянным. Если, по установлении этого, обозначить всю окружность или какую-либо ее определенную часть через b и положить $b \,.\, x :: a \,.\, y$, то кривая CMD, которая в этом случае окажется FMD, будет спиралью Архимеда, и мы будем иметь $y = \frac{ax}{b}$. Диференциал этого будет:

$$dy = \frac{a\,dx}{b},$$

откуда

$$y\,dx = \frac{by\,dy}{a} = x\,dy,$$

если подставить вместо y его величину $\frac{ax}{b}$; следовательно,

$$FT\left(\frac{yy\,dx}{a\,dy}\right) = \frac{xy}{a}.$$

Это дает следующее построение.

Опишем из центра F радиусом FM дугу круга MQ, ограниченную в Q радиусом FA, который соединяет неподвижные точки A и F, и возьмем FT равным дуге MQ. Я утверждаю, что MT будет касательной в M. Действительно из подобия секторов FPA и FMQ следует, что

$$FP(a) \,.\, FM(y) :: AP(x) \,.\, MQ = \frac{yx}{a} = FT.$$

Если вообще взять $b \,.\, x :: a^m \,.\, y^m$ (показатель степени m обозначает какое угодно целое или дробное число), то кривая FMD будет одной из всего бесконечного множества спиралей. Мы будем иметь тогда:

$$y^m = \frac{a^m x}{b},$$

диференциал чего будет:

$$my^{m-1}\,dy = \frac{a^m\,dx}{b},$$

откуда

$$y\,dx = \frac{mby^m\,dy}{a^m} = mx\,dy,$$

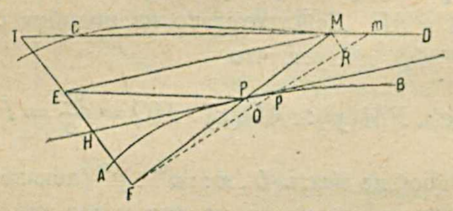
если подставить вместо y^m его значение $\frac{a^m x}{b}$, и следовательно,

$$FT\left(\frac{yy\,dx}{a\,dy}\right)=\frac{mxy}{a}=m\times MQ$$ [51]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VI.

Задача.

24. Пусть APB (черт. 11) — *кривая линия, касательные которой* PH *известны, и* F — *фиксированная точка вне этой линии. Пусть* CMD — *другая кривая, такая, что если провести произвольную прямую* FPM, *то отношение между* FP *и* FM *выразится некоторым уравнением. Требуется из данной точки* M *провести касательную* MT.



Черт. 11.

Проведя прямую FHT, перпендикулярную FM, и представив себе, как и в предыдущем предложении, малые треугольники POp и MRm, подобные треугольникам HFP и TFM, обозначим известные FH через s, FP через x, FM через y. Мы получим тогда:

$$PF(x)\,.\,FH(s)::pO(dx)\;.\,OP=\frac{s\,dx}{x};$$

и

$$FP(x) \,.\, FM(y) :: OP\left(\frac{s\,dx}{x}\right) . RM = \frac{sy\,dx}{xx};$$

и

$$mR\,(dy) \,.\, RM\left(\frac{sy\,dx}{xx}\right) :: FM(y) \,.\, FT = \frac{syy\,dx}{xx\,dy}.$$

Остальное получается посредством диференцирования данного уравнения.

Пример.

25. Если в качестве кривой APB взять прямую линию PH, а уравнением, выражающим отношение FP и FM, будет $y - x = a$, т. е. PM остается всегда равным данной прямой a, то в качестве диференциала получится $dy = dx$, следовательно,

$$FT\left(\frac{syy\,dx}{xx\,dy}\right) = \frac{syy}{xx}.$$

Это дает следующее построение.

Проводим ME параллельно PH и MT — параллельно PE; я утверждаю, что она будет касательной в M.

Действительно

$$FP\,(x) \,.\, FH\,(s) :: FM\,(y) \,.\, FE = \frac{sy}{x}$$

и

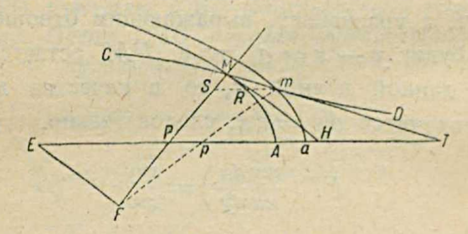
$$FP(x) \,.\, FE\left(\frac{sy}{x}\right) :: FM\,(y) \,.\, FT = \frac{syy}{xx}.$$

Ясно, что кривая CMD есть конхоида Никомеда, асимптотой которой является прямая PH, а полюсом — фиксированная точка F [52]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VII.

Задача.

26. Пусть *кривая линия* ARM (черт. 12), *касательные которой* MH *известны, имеет диаметром прямую* EPAHT. *Пусть далее вне этого диаметра имеется фиксированная точка* F, *из которой выходит бесконечная прямая* FPSM, *пересекающая диаметр в* P, *а кривую в* M. *Если теперь предположить, что при вращении прямой* FPM *вокруг точки* F *фигура* PAM *передвигается параллельно самой себе вдоль неподвижной бесконечной прямой* ET



Черт. 12.

так, что расстояние PA *остается неизменным, то* M, *точка постоянного пересечения линий* FM *и* AM, *опишет при этом движении кривую линию* CMD. *Предлагается провести из данной точки* M *на этой кривой касательную* MT.

Представим себе, что фигура PAM перешла в бесконечно близкое положение pam, и проведем линию mRS параллельно AP. $Pp = Aa = Rm$, что ясно из способа их образования, и следовательно, $RS = Sm - Pp$. Итак, обозначив известные FP или Fp через x, FM или Fm через y, PH через s, MH через t и диференциал Pp через dz, мы из подобия

треугольников FPp и FSm, MPH и MSR, MHT и MRm получим:

$$Fp\,(x)\,.\,Fm\,(y)::Pp\,(dz)\,.\,Sm=\frac{y\,dz}{x}$$

$\left(\text{значит } SR=\frac{y\,dz-x\,dz}{x}\right)$ и

$$PH\,(s)\,.\,HM\,(t)::SR\left(\frac{y\,dz-x\,dz}{x}\right).\,RM=\frac{ty\,dz-tx\,dz}{sx};$$

и

$$MR\left(\frac{ty\,dz-tx\,dz}{sx}\right).\,Rm\,(dz)::MH\,(t)\,.\,HT=\frac{sx}{y-x}.$$

Значит, если провести FE параллельно MH и взять $HT=PE$, то линия MT будет искомой касательной.

Если бы линия AM была прямой, кривая CMD оказалась бы гиперболой, имеющей одной из своих асимптот линию ET. Если бы она была кругом с центром в точке P, кривая CMD оказалась бы конхоидой Никомеда, имеющей асимптотой линию ET и полюсом точку F. А если бы она была параболой, то кривая CMD оказалась бы сопровождающей кривой параболоиды Декарта (Geom., кн. 3), которая получилась бы при упомянутом движении под прямой ET в результате пересечения FP с другой половиной параболы [53]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VIII.

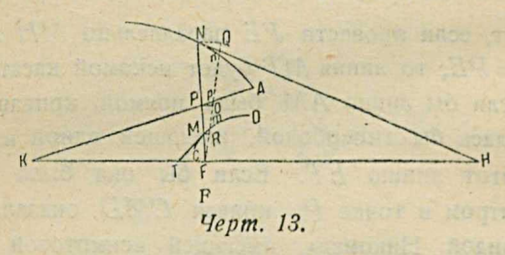
Задача.

27. Пусть *кривая* AN (черт. 13) *имеет диаметром прямую линию* AP, *а фиксированная точка* F *находится вне этих линий. Пусть другая кривая* CMD *такова, что*

7*

если провести произвольную прямую FMPN, *то отношение между ее частями* FN, FP *и* FM *выразится некоторым уравнением. Спрашивается, как провести из данной точки* M *касательную* MT.

Проведем через точку F линию HK, перпендикулярную FN и пересекающуюся с диаметром AP в K и с данной касательной NH — в H, и опишем из центра F радиусами FN, FP и FM малые круговые дуги NQ, Po, MR, ограниченные прямой Fn, образующей бесконечно малый угол с FN.



Черт. 13.

Если обозначить известные: FK через s, FH через t, FP через x, FM через y, FN через z, то из подобных треугольников PFK и poP, FMR и FPo и FNQ, HFN и NQn, mRM и MFT получится, что

$$PF(x) \, . \, FK(s) :: po\,(dx) \, . \, oP = \frac{s\,dx}{x};$$

и

$$FP(x) \, . \, FM(y) :: Po \ \left(\frac{s\,d}{x}\right) . \, MR = \frac{sy\,dx}{xx};$$

и

$$FP(x) \, . \, FN(z) :: Po\left(\frac{s\,dx}{x}\right) . \, NQ = \frac{szdx}{xx};$$

и

$$HF(t) \,.\, FN(z) :: NQ\left(\frac{sz\,dx}{xx}\right) . \,Qn\,(-dz) = \frac{szz\,dx}{txx};$$

и

$$mR(dy) \,.\, RM\left(\frac{sy\,dx}{xx}\right) :: FM(y) \cdot FT = \frac{syy\,dx}{xx\,dy}.$$

При помощи диференцирования данного уравнения можно выразить величину dy через dx и dz. Если в получившееся выражение подставить затем вместо dz его отрицательное значение $\frac{-szz\,dx}{txx}$ (потому что при возрастании x, z убывает), то dy выразится через члены, каждый из которых содержит множитель dx. Таким образом, когда это выражение для dy будет, наконец, подставлено в $\frac{syy\,dx}{xx\,dy}$, dx сократится. Следовательно, величина FT выразится через известные члены, не содержащие диференциалов.

Если предположить на месте прямой линии AP кривую и провести касательную PK, то для FT получится то же самое значение и рассуждения останутся прежними.

Пример.

28. Предположим, что кривая AN (черт. 14) есть круг, проходящий через точку F (так расположенную относительно диаметра AP, что перпендикулярная к этому диаметру линия FB проходит через центр G этого круга), и что PM всегда равна PN. Ясно, что кривая CMD, которая в этом случае

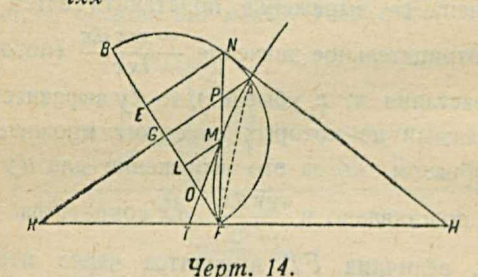
окажется FMA, будет циссоидой Диоклеса. Уравнение при этом будет:

$$z + y = 2x;$$

диференциал его есть:

$$dy = 2dx - dz = \frac{2txx\,dx + szz\,dx}{txx},$$

если подставить вместо dz уже найденное выше его значение $-\frac{szz\,dx}{txx}$ (§ 27).



Черт. 14.

Следовательно,

$$FT\left(\frac{syy\,dx}{xx\,dy}\right) = \frac{styy}{2txx + szz}.$$

Если данная точка M попадает в точку A, то каждая из линий FM, FN, FP окажется равной FA, так же как и прямые FK и FH; следовательно, в этом случае $FT = \frac{x^4}{3x^3} = \frac{1}{3}x$. Значит, если взять $FT = \frac{1}{3}AF$ и провести линию AT, она будет касательной в A.

Касательные к циссоиде можно найти еще по способу, изложенному в первом предложении, проводя

перпендикуляры NE, ML к диаметру FB и отыскивая уравнение, выражающее отношение абсциссы FL к ординате LM. Это производится следующим образом. Обозначив известные FB через $2a$, FL или BE через x, LM через y, получим из свойства круга и подобия треугольников FEN и FLM:

$$FL(x)\,.\,LM(y)::FE\cdot EN::EN(\sqrt{2ax-xx})\,.\,EB(x).$$

Отсюда

$$yy=\frac{x^3}{2a-x},$$

диференциал чего есть:

$$2y\,dy=\frac{6axx\,dx-2x^3\,dx}{\overline{2a-x}^2}.$$

Следовательно,

$$LO\,(\S\ 9)\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=\frac{yy\,\overline{2a-x}^2}{3axx-x^3}=\frac{2ax-xx}{3a-x},$$

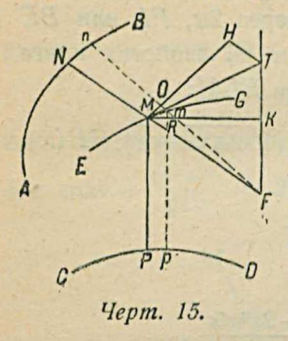
если подставить вместо yy его значение $\frac{x^3}{2a-x}$ [54]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IX.

Задача.

29. Пусть ANB *и* CPD — *две кривые, а* FKT — *прямая, на которых отмечены фиксированные точки* A, C, F (черт. 15); *пусть кроме того другая кривая* EMG *такова, что если провести через какую-либо ее точку* M *прямую* FMN *и провести* MP *параллельно* FK, *то отношение дуги* AN *к дуге* CP *выразится некоторым уравнением. Требуется из данной точки* M *на кривой* EG *провести касательную* MT.

Проведя через искомую точку T линию TH, параллельную FM, а через данную точку M прямые MRK и MOH, параллельные касательным в P и N, нанесем $FmOn$, бесконечно близкую к FMN, и mRp, параллельную MP.



Черт. 15.

Если теперь обозначить известные FM через s, FN через t, MK через u, CP через x, AN через y (значит Pp или $MR = dx$, $Nn = dy$), то из подобия треугольников FNn и FMO, MOm и MHT, MRm и MKT получится:

$$FN(t) \,.\, FM(s) :: Nn\,(dy) \,.\, MO = \frac{s\,dy}{t}$$

и

$$MR\,(dx) \,.\, MO\left(\frac{s\,dy}{t}\right) :: MK(u) \,.\, MH = \frac{su\,dy}{t\,dx}\,.$$

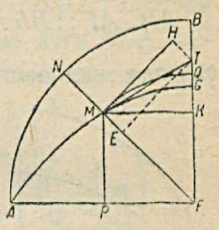
При помощи диференцирования данного уравнения величина dy выразится через члены, каждый из которых содержит множитель dx, и, при подстановке полученного выражения в $\frac{su\,dy}{t\,dx}$, dx сократится. Следовательно, величина MH выразится через вполне известные члены. Это дает следующее построение.

Проведем линию MH, параллельную касательной в N и равную только что найденной величине; проведем HT, параллельную FM и пересекающую прямую FK в T; через эту точку пересечения и через данную точку M проведем искомую касательную MT.

Пример.

30. Если кривая ANB (черт. 16) будет четвертью круга с центром в фиксированной точке F, кривая CPD — радиусом APF, перпендикулярным к прямой $FKGQTB$, и если дуга $AN(y)$ всегда относится к прямой $AP(x)$, как четверть круга $ANB(b)$ к радиусу $AF(a)$, то кривая EMG окажется квадратрисой Динострата AMG, и мы будем иметь

$$MH\left(\frac{su\,dy}{t\,dx}\right)=\frac{as\,dy-sx\,dy}{a\,dx},$$



Черт. 16.

так как FP или $MK(u)=a-x$ и $FN\ (t)=a$. Но из предположенной пропорциональности следует, что $ay=bx$ и $a\,dy=b\,dx$. Поэтому, подставляя в значение MH вместо x и dy их значения $\frac{ay}{b}$ и $\frac{b\,dx}{a}$, найдем $\frac{bs-ys}{a}$. Это дает следующее построение.

Проведем линию MH, перпендикулярную к FM и равную дуге MQ, описанной из центра F, и линию HT, параллельную FM. Я утверждаю, что линия MT будет касательной в M. Действительно, из подобия секторов FNB и FMQ имеем:

$$FN(a)\,.\,FM(s)::NB\,(b-y)\,.\,MQ=\frac{bs-sy}{a}\ ^{55}).$$

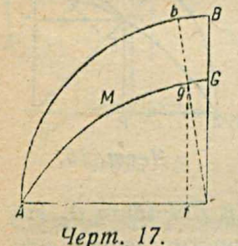
Следствие.

31. Если требуется определить точку G, в которой квадратриса AMG пересекает радиус FB (черт. 17),

то следует представить себе еще другой радиус Fgb, бесконечно близкий к FGB. Если провести gf параллельно FB, то свойство квадратрисы и подобие треугольников FBb и gfF, прямоугольных при B и при f, дадут:

$$AB\,.\,AF::Bb\,.\,Ff::FB \text{ или } AF\,.\,gf \text{ или } FG.$$

Отсюда видно, что если взять третью пропорциональную к четверти круга AB и к радиусу AF, то она будет равна FG, т. е. $FG = \frac{aa}{b}$. Это позволяет упростить построение касательных.



Черт. 17.

Действительно, если провести TE параллельно MH (черт. 16), то подобные треугольники FMK и FTE дадут:

$$MK\,(a-x)\,.\,MF\,(s)::$$
$$::ET \text{ или } MH\left(\frac{bs-sy}{a}\right).\ FT = \frac{bss-yss}{aa-ax} = \frac{bss}{aa},$$

если подставить вместо x его значение $\frac{ay}{b}$ и затем все разделить на $b-y$. Отсюда ясно, что линия FT есть третья пропорциональная к TG и FM.

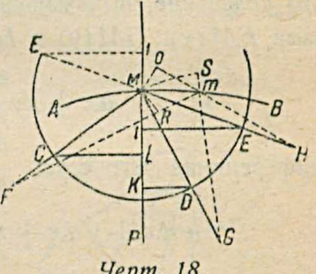
ПРЕДЛОЖЕНИЕ X.

Задача.

32. Пусть *кривая линия* AMB (черт. 18) *такова, что отношение между прямыми* MF, MG, MH *и т. д., проведенными из какой-либо ее точки* M *к фокусам* F, G, H,

выражается некоторым уравнением. Пусть требуется в данной точке M *восставить к касательной в этой точке перпендикуляр* MP.

Взяв на кривой AB бесконечно малую дугу Mm и проведя прямые FRm, GmS и HmO, опишем из центров F, G и H малые круговые дуги MR, MS и MO. Затем из центра M опишем каким-либо радиусом круг CDE, пересекающий линии MF, MG и MH в точках C, D и E. Из этих точек опустим на MP перпендикуляры CL, DK и EI. Сделав эти приготовления, я замечаю, что:



Черт. 18.

1° Прямоугольные треугольники MRm и MLC подобны, так как если отнять от прямых углов LMm и RMC общий угол LMR, то оставшиеся [углы] RMm и LMC будут равны, и так как вдобавок углы при R и L — прямые. Так же можно доказать, что подобны прямоугольные треугольники MSm и MKD, MOm и MIE. Поэтому из того, что малые треугольники MRm, MSm и MOm имеют общую гипотенузу Mm и что гипотенузы MC, MD и ME треугольников MLC, MKD и MIE между собою равны, следует, что перпендикуляры CL, DK и EI относятся между собою, как диференциалы Rm, Sm и Om.

2° Линии, выходящие из фокусов, находящихся с одной стороны перпендикуляра MP, возрастают, в то время как другие линии убывают, и обратно. Так, на черт. 18 FM увеличивается на его диференциал Rm, в то время как Gm и HM уменьшаются на их диференциалы Sm и Om.

Если теперь для определенности предположить, что уравнение, выражающее отношение между отрезками $FM(x)$, $GM(y)$ и $HM(z)$, есть:

$$ax+xy-zz=0,$$

диференциал чего есть:

$$a\,dx+y\,dx+x\,dy-2z\,dz=0,$$

то, очевидно, касательная в M (которая есть не что иное, как продолжение Mm малой стороны многоугольника, образующего по предположению (§ 3) кривую AMB) должна быть расположена таким образом, чтобы при проведении через какую-либо ее точку m линий mR, mS и mO, параллельных прямым FM, GM и HM и ограниченных в R, S и O перпендикулярами к ним MR, MS и MO, всегда имело место уравнение:

$$\overline{a+y}\times Rm+x\times Sm-2z\times Om=0,$$

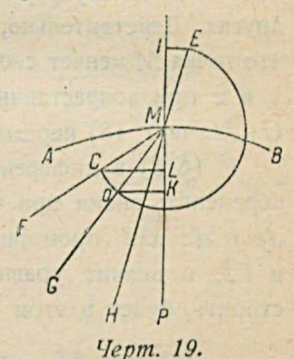
или же (что сводится к тому же, если заменить Rm, Sm и Om пропорциональными им величинами CL,

DK и EI) MP, перпендикуляр к кривой, должен быть расположен так, что:

$$\overline{a+y}\times CL+x\times DK-2z\times EI=0.$$

Это дает следующее построение.

Предположим, что точка C (черт. 18, 19) обладает весом $a+y$, на который умножается диференциал dx прямой FM, на которой эта точка находится; что, аналогично, точка D обладает весом x, а точка E, взятая с другой стороны от M относительно фокуса H (так как член $-2z\,dz$ отрицателен), обладает весом $2z$. Я утверждаю, что прямая MP, проходящая через общий центр тяжести весов, находящихся по предположению в C, D и E, будет требуемым перпендикуляром. Действительно из принципов механики ясно, что всякая прямая, проходящая через центр тяжести нескольких весов, разделяет их таким образом, что веса по одну сторону этой прямой, умноженные каждый на его расстояние от нее, в точности равны весам по другую ее сторону, также умноженным каждый на его расстояние от этой же прямой. Стало быть, если y и z при возрастании x тоже возрастают, т. е. если фокусы F, G и H оказываются (черт. 19) по одну сторону MP, как и



Черт. 19.

предполагалось все время при диференцировании данного уравнения по указанным правилам, то линия MP будет иметь, с одной стороны, веса в C и D, а с другой, — вес в E, и таким образом $\overline{a+y}\times CL+x\times \times DK-2z\times EI=0$. А это уравнение и требовалось построить.

Теперь я утверждаю, что так как построение подходит в этом случае, то оно будет годиться и во всех других. Действительно, если, например, предположить, что точка M меняет свое положение на кривой так, что y и z при возрастании x убывают, т. е. что фокусы G и H (черт. 18) переходят на другую сторону MP, то:

1° (§ 8) в диференциале данного уравнения надо переменить знаки при членах, содержащих множители dy и dz или пропорциональные им величины DK и EI, и значит уравнение, которое требуется построить, будет в этом случае:

$$\overline{a+y}\times CL-x\times DK+2z\times EI=0.$$

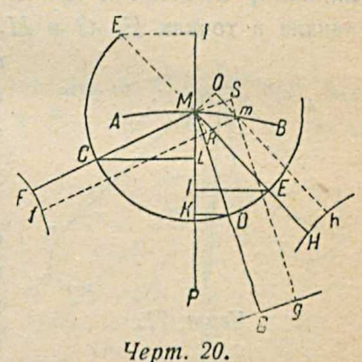
2° Веса в D и E окажутся по другую сторону MP, и из свойства центра тяжести получится:

$$\overline{a+y}\times CL-x\times DK+2z\times EI=0,$$

что и является уравнением, которое требуется построить. А так как это имеет место во всех возможных случаях, то из этого следует, что и т. д.

Очевидно, это же рассуждение сохраняется для любого числа фокусов и любого заданного уравнения, откуда получается следующее общее построение.

Диференцируем данное уравнение, относительно которого я предполагаю, что одной из частей его является нуль [56]), и описываем из центра *M* произвольный круг *CDE*, пересекающий прямые *MF*, *MG* и *MH* в точках *C*, *D* и *E*. Предположим, что в этих точках имеются веса, которые относятся между собой, как величины, на которые умножаются диференциалы тех линий, на которых они расположены. Я утверждаю, что линия *MP*, проходящая через их общий центр тяжести, будет требуемым перпендикуляром. Следует иметь в виду, что если в диференциале данного уравнения один из весов является отрицательным, то надо считать, что он находится с другой стороны от точки *M* относительно фокуса.

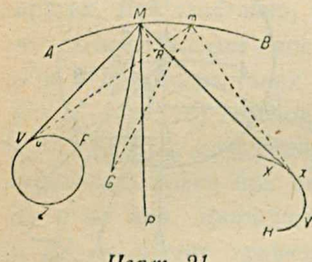


Черт. 20.

Построение остается тем же и в том случае, если фокусы *F*, *G*, *H* (черт. 20) являются прямыми или кривыми линиями, на которые прямые *MF*, *MG* и *MH* падают под прямыми углами. Действительно, если из точки *m*, взятой бесконечно близко к *M*, опустить на фокусы перпендикуляры *mf*, *mg*, *mh*, а из точки *M* провести к этим перпендикулярам малые перпендикуляры *MR*, *MS* и *MO*, то ясно, что *Rm* будет диференциалом *MF*, так как прямые *MF* и *Rf* равны

как перпендикуляры, заключенные между параллельными линиями Ff и MR. Аналогично, Sm есть диференциал MG, а Om — диференциал MH. Остальное затем доказывается, как и выше.

Можно еще предположить, что все или часть фокусов F, G и H (черт. 21) являются кривыми линиями, имеющими фиксированные и неизменные начала в точках F, G и H, и что кривая AMB такова, что если провести, например, из какой-либо ее точки M касательные MV, MX и прямую MG, то соотношение между смешанно-линейными линиями FVM, HXM и прямой GM выражается некоторым уравнением.



Черт. 21.

Ясно, что касательная mu, проведенная из точки m, взятой бесконечно близко к M, пересекает другую касательную в точке V (так как она есть не что иное, как продолжение малой дуги Vu, рассматриваемой как малая прямая); следовательно, если из центра V описать малую дугу круга MR, то Rm будет диференциалом смешанно-линейной линии FVM, которая обратится в $FVuRm$. Остальное доказывается, как прежде.

Г. Чиргауз *дал первую идею этой задачи в своем Livre de la Medceine de l'esprit*; г. Фатио *нашел потом очень остроумное ее решение, опубликованное им*

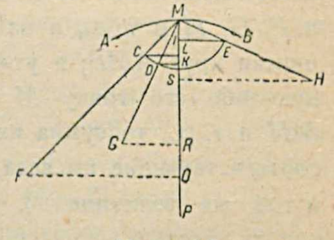
в Journaux d'Hollande. Но их подход к задаче является лишь частным случаем приведенного мною только что общего построения [57]).

Пример I.

33. Пусть $axx + byy + czz - f^3 = 0$ (прямые a, b, c, f даны). Диференциал этого будет:

$$ax\,dx + by\,dy + cz\,dz = 0.$$

Поэтому, если предположить в C (черт. 22) вес ax, в D — вес by и в E — вес cz, т. е. веса, которые относятся между собой, как эти прямоугольники [58]), то линия MP, проходящая через их общий центр тяжести, будет перпендикулярной к кривой в точке M.



Черт. 22.

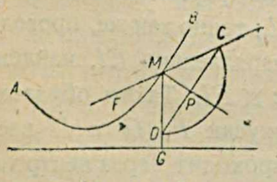
Если провести FO параллельно CL и взять радиус MC за единицу, подобные треугольники MCL и MFO дадут, что $FO = x \times CL$; точно так же, проведя GR параллельно DK и HS параллельно EI, найдем, что $GR = y \times DK$ и $HS = z \times EI$. Таким образом, если представить себе в фокусах F, G и H веса a, b и c, линия MP, которая проходит через центр тяжести весов ax, by и cz, предположенных в C, D и E, пройдет также и через центр тяжести этих новых весов. Значит этот центр тяжести есть фиксирован-

ная точка, так как веса в F, G и H, а именно a, b и c, суть постоянные прямые [отрезки], которые остаются неизменными, где бы ни находилась точка M. Отсюда следует, что кривая AMB должна быть такова, чтобы все ее перпендикуляры пересекались в одной точке, т. е. она будет кругом с центром в этой точке. Таким образом получается замечательное свойство круга, которое можно формулировать следующим образом.

Допустим, что в некоторой плоскости имеется любое количество весов a, b, c и т. д., находящихся в F, G, H и т. д., и из их общего центра тяжести описан круг AMB; я утверждаю, что если через какую-либо его точку M провести прямые MF, MG, MH и т. д., то сумма их квадратов, умноженных на соответствующие им веса, будет всегда равна одной и той же величине [59]).

Пример II.

34. Пусть кривая AMB такова (черт. 23), что если из какой-либо ее точки M провести прямую MF к фокусу F, который является фиксированной точкой, и перпендикуляр MG — к фокусу G, который является прямой линией, то отношение MF к MG остается постоянно равным отношению данной a к данной b.



Черт. 23.

Обозначив FM через x, MG через y, будем иметь:

$$x \,.\, y :: a \,.\, b$$

и, следовательно,

$$ay = bx,$$

диференциал чего есть:

$$a\,dy - b\,dx = 0.$$

Поэтому, если предположить в C, находящейся за M относительно F, вес b, а в D (находящейся на таком же расстоянии от M) вес a, то линия MP, проведенная через их общий центр тяжести, окажется требуемым перпендикуляром.

Из принципа рычажных весов (balance) ясно, что если разделить хорду CD точкой P так, чтобы $CP \,.\, DP :: a \,.\, b$, то точка P будет общим центром тяжести предположенных в C и D весов.

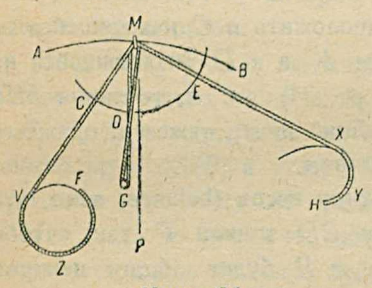
Кривая AMB есть коническое сечение, именно: она — парабола, когда $a = b$, гипербола, когда a больше b, и, наконец, эллипс, когда меньше [60]).

Пример III.

35. Если, привязав концы нити $FZVMGMXYH$ (черт. 24) в F и H и укрепив маленькое острие в G, одинаково натянуть нить посредством иглы, помещенной в M, так, чтобы части FZV и HYX обмотались вокруг кривых, имеющих начало в F и H, и чтобы часть MG была двойной, т. е. загибалась в G, и если, оставляя все в этом положении, начать двигать

иглу M, то она, очевидно, опишет кривую AMB. Спрашивается, как из данной точки этой кривой M провести перпендикуляр MP, если известно положение, которое занимает в этой точке нить, служащая для образования кривой.

Заметим, что прямолинейные части нити MV и MX всегда являются касательными в V и X. Обозначив смешанно-линейные линии $FZVM$ через x, $HYXM$ через z, прямую линию MG через y и прямую линию, равную длине нити, через a, мы будем иметь всегда:



Черт. 24.

$$x + 2y + z = a,$$

откуда я узнаю, что к кривой AMB применимо общее построение. Поэтому, взяв диференциал

$$dx + 2dy + dz = 0$$

и предположив в C вес 1, в D вес 2 и в E вес 1, я утверждаю, что линия MP, которая проходит через общий центр тяжести этих весов, есть требуемый перпендикуляр.

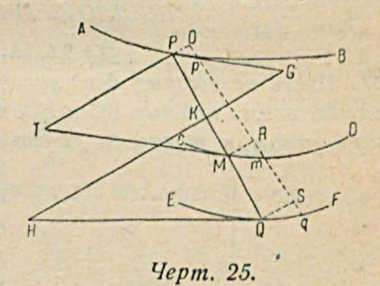
ПРЕДЛОЖЕНИЕ XI.

Задача.

36. Пусть APB *и* EQF (черт. 25) — *две какие-либо линии, касательные которых* PG *и* QH *известны, и пусть* PQ — *прямая линия, на которой отмечена точка* M. *Если*

предположить, что концы этой прямой P *и* Q *скользят вдоль линий* AB *и* EF, *то ясно, что точка* M *опишет при этом движении кривую* CD. *Требуется из данной точки* M *на этой кривой провести касательную* MT.

Представив себе, что подвижная прямая PMQ перешла в бесконечно близкое положение pmq, проведем малые прямые PO, MR и QS, перпендикулярные к PQ. При этом образуются малые прямоугольные треугольники pOP, mRM и qSQ. Взяв PK равным MQ, проведем HKG перпендикулярно PQ и продолжим OP до T, где она по моему предположению встретит искомую касательную MT. После этого ясно, что малые прямые Op, Rm и Sq равны между собой, так как согласно построению PK и MQ всюду одинаковы.



Черт. 25.

Обозначив данные PM или KQ через a, MQ или PK через b, KG через f, KH через g и малую прямую Op или Rm или Sq через dy, мы получим из подобия треугольников PKG и pOP, QKH и qSQ, что

$$PK(b) . KG(f) : : pO(dy) . OP = \frac{f\,dy}{b}.$$

Далее

$$QK(a) . KH(g) : : qS(dy) . SQ = \frac{g\,dy}{a}.$$

А из обыкновенной геометрии известно, что

$$MR = \frac{OP \times MQ + QS \times PM}{PQ} = \frac{fdy + gdy}{a + b}.$$

Значит, подобные треугольники mRM и MPT дадут:

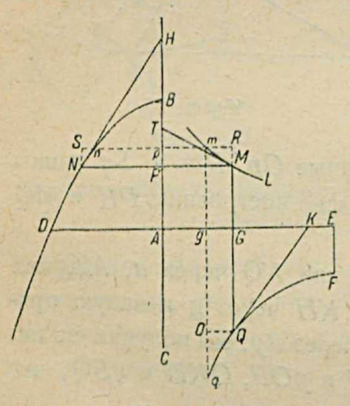
$$mR\,(dy)\,.\,RM\,\left(\frac{f\,dy + g\,dy}{a + b}\right) :: MP\,(a)\,.\,PT = \frac{af + ag}{a + b}.$$

Что и требовалось найти.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XII.

Задача.

37. Пусть *некоторые две линии* BN *и* FQ (черт. 26) *имеют осями прямые* BC *и* ED, *пересекающиеся под прямым углом в точке* A. *Пусть далее кривая линия* LM *такова, что если из какой-либо ее точки* M *провести прямые* MGQ *и* MPN, *параллельные* AB *и* AE, *то соотношение между площадями* EGQF (*точка* E *есть фиксированная точка, заданная на прямой* AE, *а линия* EF *параллельна* AC) *и* APND *и прямыми* AP, PM PN *и* GQ *выражается некоторым уравнением. Требуется из данной точки* M *на кривой* LM *провести касательную* MT.



Черт. 26.

Обозначив данные и переменные AP или GM через x, PM или AG через y, PN через u, GQ через z, площадь $EGQF$ через s, площадь $APND$

через t и данные подкасательные PH через a, GK через b, получим, что Pp или NS или $MR = dx$, Gg или Rm или $OQ = -dy$; $Sn = -du = \frac{u\,dx}{a}$ из подобия треугольников HPN и NSn; $Oq = dz = = -\frac{z\,dy}{b}$, $NPpn = dt = u\,dx$ и $QGgq = ds = -z\,dy$; при этом надо иметь в виду, что величины Rm и Sn отрицательны, потому что $PM\,(y)$ и $PN\,(u)$ убывают при возрастании $AP\,(x)$. После этого надо взять диференциал данного уравнения и подставить в этот диференциал вместо dt, ds, du и dz их значения $u\,dx, -z\,dy, -\frac{u\,dx}{a}, -\frac{z\,dy}{b}$, что дает новое уравнение, которое и выразит искомое отношение между dy и dx или MP и PT.

Пример I.

38. Пусть $s + zz = t + ux$; продиференцировав, получим:

$$ds + 2z\,dz = dt + u\,dx + x\,du;$$

подставив вместо ds, dt, dz, du их значения, найдем:

$$-z\,dy - \frac{2zz\,dy}{b} = 2u\,dx - \frac{ux\,dx}{a},$$

откуда

$$PT\ \left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = \frac{2ayzz + aybz}{bax - 2abu}.$$

Пример II.

39. Пусть $s = t$, значит $ds = dt$, т. е. $-z\,dy = u\,dx$; следовательно,

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right) = -\frac{yz}{u}.$$

Так как эта величина — отрицательная, то (*§ 10*) точку T надо взять со стороны, противоположной точке A, началу x-ов. Если предположить, что линия FQ — гипербола, имеющая асимптотами прямые AC и AE, так что $GQ\,(z) = \frac{cc}{y}$, и что линия BND есть прямая, параллельная AB, причем $PN\,(u)$ всегда равна данной прямой c, то ясно, что кривая LM имеет асимптотой прямую AB и что подкасательная $PT\left(\frac{-yz}{u}\right) = -c$, т. е. остается всюду одинаковой.

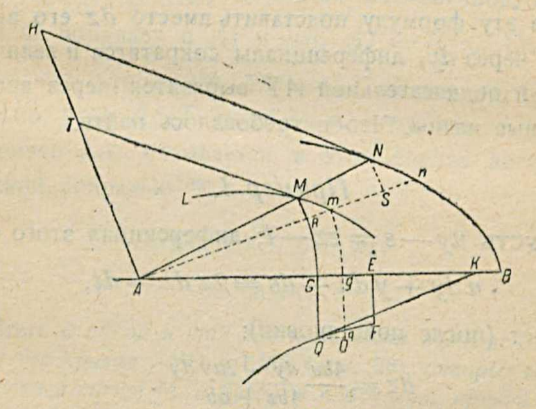
Кривая LM называется в этом случае логарифмикой [61]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XIII.

Задача.

40. Пусть *некоторые две линии* BN *и* FQ (черт. 27), *имеют общей осью прямую* BA, *на которой отмечены две фиксированные точки* A *и* E. *Пусть третья кривая линия* LM *такова, что если через какую-либо из ее точек* M *провести прямую* AN, *описать из центра* A *дугу круга* MG *и провести* GQ *параллельно* EF, *которая перпендикулярна* AB, *то соотношение между площадями* EGQF (s), ABN (t) *и прямыми* AM *или* AG (y), AN (z), GQ (u) *выражается некоторым уравнением. Требуется из данной точки* M *на кривой* LM *провести касательную* MT.

Проведя прямую ATH перпендикулярно AMN, представим себе другую прямую Amn, бесконечно близкую к AMN, другую дугу mg и другой перпендикуляр gq и опишем из центра A малую дугу NS. Обозначив данные подкасательные AH через a, GK через b, получим, что Rm или $Gg = dy$, $Sn = dz$.



Черт. 27.

Из подобия треугольников HAN и NSn, KGQ и QOq будет также следовать, что

$$SN = \frac{a\,dz}{z},\ Oq = -du = \frac{u\,dy}{b},\ GQqg = -ds = u\,dy,$$

$$ANn \text{ или } AN \times \frac{1}{2} NS = -dt = \frac{1}{2}\,adz.$$

Подставив все эти значения в диференциал данного уравнения, образуем новое уравнение, выражающее dz

через dy. А из подобия секторов и треугольников ANS и AMR, mRM и MAT найдем:

$$AN(z) \,.\, AM(y) :: NS\left(\frac{a\,dz}{z}\right) \,.\, MR = \frac{ay\,dz}{zz}.$$

Далее

$$mR\,(dy) \,.\, RM\left(\frac{ay\,dz}{zz}\right) :: AM\,(y) \,.\, AT = \frac{ayy\,dz}{zz\,dy}.$$

Если в эту формулу подставить вместо dz его выражение через dy, диференциалы сократятся и величина искомой подкасательной AT выразится через вполне известные члены. Что и требовалось найти.

Пример I.

41. Пусть $uy - s = zz - t$; диференциал этого есть

$$u\,dy + y\,du - ds = 2z\,dz - dt,$$

что дает (после подстановки):

$$dz = \frac{4bu\;dy - 2uy\,dy}{4bz + ab}.$$

Подставляя это значение в $\frac{ayy\,dz}{zz\,dy}$, найдем, что

$$AT = \frac{4a\,bu\,yy - 2a\,uy^3}{4bz^3 + abzz}.$$

Пример II.

42. Пусть $s = 2t$; значит $ds = 2dt$, т. е. $-u\,dy = -a\,dz$, или $dz = \frac{u\,dy}{a}$. Следовательно,

$$AT\left(\frac{ayy\,dz}{zz\,dy}\right) = \frac{uyy}{zz}.$$

Если линия BN есть круг с центром в точке A, имеющий радиусом прямую $AB = AN = c$, и FQ есть такая гипербола, что $GQ\,(u) = \frac{ff}{y}$, то ясно, что кривая LM, прежде чем достигнет центра A, сделает вокруг него бесконечное множество оборотов (так как площадь $FEGQ$ становится бесконечной, когда точка G попадает в A) и что $AT = \frac{ffy}{cc}$. Отсюда видно, что отношение AM к AT постоянно, следовательно, угол AMT везде один и тот же.

Кривая LM называется в этом случае логарифмической спиралью [62]).

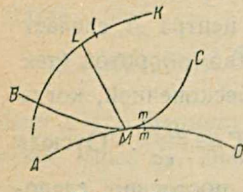
ПРЕДЛОЖЕНИЕ XIV.

Задача.

43. Пусть *в одной и той же плоскости имеются некоторые две кривые* AMD *и* BMC (черт. 28), *которые соприкасаются в точке* M, *и пусть в плоскости кривой* BMC *имеется фиксированная точка* L. *Если предположить, что кривая* BMC *катится по кривой* AMD, *непрерывно к ней прилегая, так что прокатившиеся части* AM *и* BM *всегда между собой равны, то очевидно, что точка* L, *которая будет перемещаться вместе с плоскостью кривой* BMC, *опишет при этом движении некоторую рулетту* [63]) ILK. *Я утверждаю, что если при всяком положении кривой* BMC *провести* (*из описывающей точки* L *в точку касания* M) *прямую* LM, *то эта прямая будет перпендикулярна к кривой* ILK.

Действительно, представим себе на обеих кривых AMD и BMC две равных между собой бесконечно

малых части Mm и Mm; их можно рассматривать (§ 3) как две малых прямых, образующих в M бесконечно малый угол. А для того чтобы Mm, малая сторона кривой или многоугольника BMC, попадала на Mm — малую сторону многоугольника AMD, надо, чтобы точка L описывала вокруг точки касания M как центра малую дугу Ll. Но очевидно, что эта малая дуга будет частью кривой ILK, и следовательно, прямая ML, перпендикулярная к ней, будет перпендикулярна и к кривой ILK в точке L. Что и требовалось доказать.



Черт. 28.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ XV.

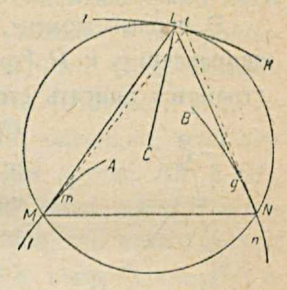
Задача.

44. Пусть MLN — *какой-либо прямолинейный угол* (черт. 29), *стороны которого* LM *и* LN *касаются некоторых двух кривых* AM *и* BN. *Если заставить стороны угла скользить по этим кривым так, чтобы они их непрерывно касались, то ясно, что вершина* L *опишет при этом движении кривую* ILK. *Требуется, зная расположение угла* MLN, *провести перпендикуляр* LC *к этой кривой.*

Опишем круг, проходящий через вершину L и точки касания M и N, и проведем через его центр C прямую CL. Я утверждаю, что она будет перпендикулярна к кривой ILK.

Действительно, станем рассматривать кривые AM и BN как многоугольники с бесчисленным множе-

ством сторон вроде Mm и Nn. Очевидно, что если заставить LM и LN, стороны прямолинейного угла MLN, который предполагается неизменным, скользить вокруг фиксированных точек M и N (касательные LM и LN рассматриваются как продолжение малых сторон Mf и Ng) до тех пор, пока сторона угла LM не совпадет с малой стороной Mm многоугольника AM и другая сторона его LN не совпадет с малой стороной Nn многоугольника BN, то вершина L опишет Ll, малую часть дуги круга MLN, так как по построению эта дуга охватывает данный угол MLN. Эта малая часть Ll будет также принадлежать кривой lLK, а следовательно, перпендикулярная к ней прямая CL будет перпендикулярной также и к этой кривой в точке L. Что и требовалось доказать.



Черт. 29.

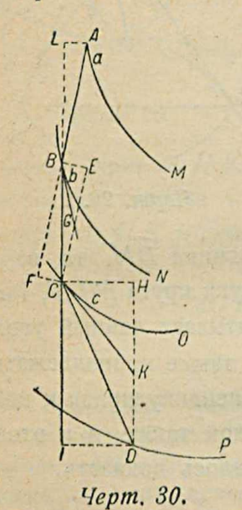
ПРЕДЛОЖЕНИЕ XVI.

Задача.

45. Пусть *к совершенно гибкой веревке* ABCD (черт. 30), *привязаны различные грузы* A, B, C *и т. д. на произвольных друг от друга расстояниях* AB, BC *и т. д. Если тянуть эту веревку за ее конец* D *по горизонтальной плоскости вдоль данной кривой* DP, *то ясно, что эти грузы расположатся так, чтобы натянуть веревку,*

а затем опишут кривые AM, BN, CO *и т. д. Спрашивается, как провести касательные, зная расположение веревки* ABCD *и величины грузов.*

В первый момент, когда конец D подвигается по направлению к P, [три] груза A, B, C описывают или стремятся описать столько же малых сторон Aa, Bb, Cc многоугольников, составляющих кривые AM, BN, CO. Следовательно, чтобы провести касательные AB, BG и CK, достаточно определить направление грузов A, B, C в этот первый момент, т. е. положение прямых, которые они стремятся описать. Для нахождения их я замечу следующее:



Черт. 30.

1° Груз A тянется в этот первый момент в направлении AB, и так как никакое препятствие не противодействует этому направлению, ибо груз A не тянет за собой никакого другого груза, то он по нему и последует. Следовательно, прямая AB будет касательной к кривой AM в точке A.

2° Груз B тянется в направлении BC. Но так как он тянет за собой груз A, который движется не в этом направлении и, следовательно, должен несколько изменить направление груза B, то груз B будет двигаться не в направлении BC, а в направлении

другой прямой *BG*, которую и надо найти. Это я осуществляю таким образом.

На *BC* как на диагонали я описываю прямоугольник *EF*, сторона которого *BF* находится на продолжении *AB*. Если предположить, что сила, которая тянет груз *B* по *BC*, выражается [отрезком] *BC*, то на основании правил механики очевидно, что эту силу *BC* можно разложить на две другие: *BE* и *BF*; другими словами, если сила *BC* тянет груз *B* в направлении *BC*, то это то же самое, как если бы груз тянули одновременно сила *BE* в направлении *BE* и сила *BF* в направлении *BF*. Груз *A* не противодействует направлению *BE*, так как он к нему перпендикулярен, и следовательно, сила *BE* в этом направлении сохраняется целиком; но груз *A* противодействует всей своей тяжестью направлению *BF*. Следовательно, для того чтобы груз *B* вместе с силой *BF* преодолел сопротивление груза *A*, надо, чтобы эта сила распределилась между грузами пропорционально их массам или величинам. Поэтому если разделить *EC* точкой *G* так, чтобы *CG* относилось к *GE*, как вес *A* к грузу *B*, то ясно, что *EG* будет выражать оставшуюся силу, с которой груз *B*, преодолев сопротивление груза *A*, стремится двигаться по направлению *BF*. Поэтому очевидно, что груз *B* тянут одновременно сила *BE* в направлении *BE* и сила *EG* в направлении *BF* или *EC*, и следовательно, он будет стремиться двигаться по *BG* с силой *BG*, т. е. *BG* будет служить направлением его

[движения] и, следовательно, касательной к кривой BN в точке B.

3° Чтобы получить касательную CK, я строю на CD как на диагонали прямоугольник HI, сторона которого CI лежит на продолжении BC, и замечаю, что груз B не противодействует силе CH, которая тянет груз C по направлению CH, но противодействует силе CI, которая тянет его в направлении CI; кроме того и груз A также противодействует этой силе. Чтобы узнать величину этого противодействия, я провожу AL перпендикулярно к CB, продолженной в сторону B, и замечаю, что если AB выражает силу, с которой груз A тянет в направлении AB, то BL выразит силу, с которой тот же груз A тянет в направлении BC. Таким образом груз C вместе с силой CI должен преодолеть весь груз B и вдобавок часть груза A, которая относится к грузу A, как BL к BA или как BF к BC. Значит, если положить, что $B+\frac{A\times BF}{BC}\,.\,C::DK\,.\,KH$, то ясно, что CK будет служить направлением [движения] груза C и, следовательно, касательной к третьей кривой CO в точке C.

Если бы число кривых было больше, то тем же способом можно было бы найти касательные к четвертой кривой, к пятой и т. д. Если угодно получить касательные к кривым, которые описываются точками, находящимися между грузами, то их можно найти согласно § 36.

ГЛАВА III

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НАХОЖДЕНИЮ НАИБОЛЬШИХ И НАИМЕНЬШИХ ОРДИНАТ, К КОТОРОМУ ПРИВОДЯТСЯ ВОПРОСЫ DE MAXIMIS ET MINIMIS

Определение I.

Пусть кривая линия MDM (черт. 31, 32, 33, 34), ординаты которой PM, ED, PM параллельны между собой, такова, что при непрерывном возрастании абсциссы AP ордината PM либо тоже возрастает до некоторой точки E, после которой она убывает, либо же, наоборот, убывает до некоторой точки E, после которой она возрастает.

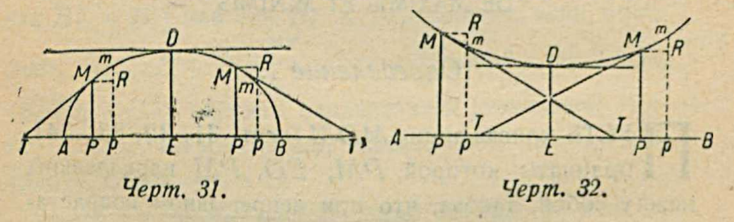
При таких условиях линия ED будет называться *наибольшей* или *наименьшей* ординатой.

Определение II.

Допустим, что имеется величина, подобная PM, составленная из одной или нескольких неопределенных величин, подобных AP, причем при непрерывном возрастании AP эта величина PM тоже возрастает до некоторой точки E, после которой она убывает, или наоборот. Пусть требуется найти для AP такую величину AE, при которой составленная из нее величина ED была бы больше или меньше всякой другой величины PM, подобным же образом составленной из AP. Это и называется вопросом *De maximis et minimis*.

ОБЩЕЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ.

46. Природа *кривой MDM известна, требуется найти для AP такое значение AE, чтобы ордината ED была наибольшей или наименьшей из числа подобных ей PM.*



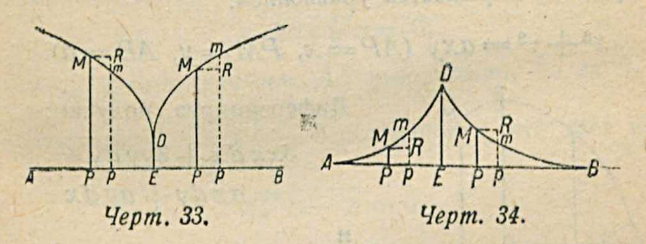
Черт. 31. *Черт. 32.*

Если PM при возрастании AP тоже возрастает, то очевидно (*§ 8, 10*), что диференциал Rm положителен по сравнению с диференциалом AP; наоборот, если PM убывает при возрастании абсциссы AP, то ее диференциал будет отрицательным. Но всякая непрерывно возрастающая или убывающая величина не

может превратиться из положительной в отрицательную, не проходя через бесконечность или через нуль, а именно: через нуль — когда она сначала убывает, и через бесконечность — когда она сначала возрастает. Отсюда следует, что диференциал *наибольшей* или *наименьшей* величины должен равняться нулю или бесконечности. Итак, поскольку природа кривой MDM известна, то надо найти (гл. *1* или *2*) величину Rm, приравнивание которой сначала нулю, а потом бесконечности послужит для нахождения искомой величины AE при обоих этих предположениях [64]).

Замечание.

47. Касательная в D (черт. 30, 31) параллельна оси AB, когда диференциал Rm в этой точке обращается в нуль; когда же он становится бесконечным,



Черт. 33. Черт. 34.

касательная совпадает с ординатой ED (черт. 33, 34). Отсюда видно, что отношение mR к RM, выражающее отношение ординаты к подкасательной, в точке D равно нулю или бесконечности.

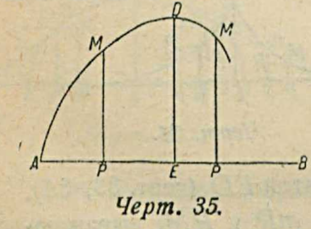
Легко понять, что непрерывно убывающая величина не может стать из положительной отрицатель-

ной, не проходя через нуль; но не так очевидно, что при возрастании она должна пройти через бесконечность. Представим себе в помощь воображению касательные в точках M, D, M (черт. 30, 31); ясно, что у кривых, у которых касательная в D параллельна оси AB, подкасательная PT непрерывно возрастает по мере того, как точки M и P приближаются к точкам D и E, и она становится бесконечной, когда точка M попадает в D, а когда наконец AP превосходит AE, подкасательная PT становится из положительной, какой она была прежде, — отрицательной, или наоборот.

Пример I.

48. Предположим, что природа кривой MDM (черт. 35) выражается уравнением:

$$x^3 + y^3 = axy \quad (AP = x,\ PM = y,\ AB = a).$$



Черт. 35.

Диференцируя, получим:

$$3xx\,dx + 3yy\,dy = = ax\,dy + ay\,dx$$

и

$$dy = \frac{ay\,dx - 3xx\,dx}{3yy - ax} = 0,$$

когда точка P попадает в искомую точку E. Отсюда

$$y = \frac{3xx}{a}.$$

Подставляя эту величину вместо y в уравнение $x^3+y^3=axy$, найдем для AE значение:

$$x=\frac{1}{3}a\sqrt[3]{2},$$

при котором ордината ED будет наибольшей из всех ей подобных PM [65]).

Пример II.

49. Пусть уравнение, выражающее природу кривой MDM (черт. 33), есть: $y-a=a^{\frac{1}{3}}\times\overline{a-x}^{\frac{2}{3}}$. Дифференцируя, я получу

$$dy=-\frac{2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}},$$

что я приравниваю сначала нулю; но так как это предположение дает мне

$$-2dx\sqrt[3]{a}=0,$$

откуда узнать значение AE невозможно, то затем я приравниваю $\frac{-2dx\sqrt[3]{a}}{3\sqrt[3]{a-x}}$ бесконечности, что дает мне

$$3\sqrt[3]{a-x}=0,$$

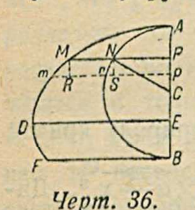
откуда $x=a$. Это и есть искомое значение AE.

Пример III.

50. Пусть AMF (черт. 36) — укороченная полуциклоида, основание которой BF меньше ANB, полуокружности образующего круга, центром которого

является точка C. Требуется на диаметре AB определить точку E, в которой ордината ED возможно наибольшая.

Проведя произвольную ординату PM, пересекающую полукруг в N, образуем, как обычно, при точках M и P малые треугольники MRm и NSn и, обозначив неопределенные AP через x, PN через z, дугу AN через u, а данные ANB через a, BF через b, CA или CN через c, получим из свойства циклоиды:



Черт. 36.

$$ANB(a) \,.\, BF(b) :: AN(u) \,.\, NM = \frac{bu}{a}.$$

Значит

$$PM = z + \frac{bu}{a},$$

а ее диференциал

$$Rm = \frac{a\,dz + b\,du}{a} = 0,$$

когда точка P попадает в искомую точку E. Но прямоугольные треугольники NSn и NPC подобны, так как если от прямых углов CNn и PNS отнять общий им угол CNS, то остающиеся [углы] SNn и PNC будут равны. Следовательно,

$$CN(c) \,.\, CP(c - x) :: Nn\,(du) \,.\, Sn\,(dz) = \frac{c\,du - x\,du}{c}.$$

Подставляя это значение вместо dz в $a\,dz + b\,du = 0$, найдем:

$$\frac{ac\,du - ax\,du + bc\,du}{c} = 0,$$

откуда x (который в этом случае будет AE) $= c + \frac{bc}{a}$.

Поэтому очевидно, что если в сторону B отложить CE, равное четвертой пропорциональной к полуокружности ANB, основанию BF и радиусу CB, то точка E и будет искомой.

Пример IV.

51. Разделить данную линию AB (черт. 35) в точке E так, чтобы произведение квадрата одной из ее частей AE на другую часть EB было наибольшим из всех аналогичных произведений.

Обозначив неизвестную AE через x и данную AB через a, будем иметь:

$$\overline{AE}^2 \times EB = axx - x^3,$$

что и должно быть *наибольшим*. Поэтому надо себе представить такую кривую линию MDM, у которой соотношение между ординатой $MP(y)$ и абсциссой $AP(x)$ выражается уравнением:

$$y = \frac{axx - x^3}{aa} \quad ^{66}),$$

и отыскать такую точку E, что ордината ED будет наибольшей из всех ей подобных PM. Это дает:

$$dy = \frac{2ax\,dx - 3xx\,dx}{aa} = 0,$$

откуда

$$AE(x) = \frac{2}{3}a.$$

Если угодно, чтобы *наибольшим* было вообще

$$x^m \times \overline{a - x}^n$$

(m и n могут обозначать любые числа), то надо, чтобы диференциал этого произведения был равен нулю или бесконечности. Это дает:

$$m\overline{x}^{m-1}dx \times \overline{a-x}^{n} - n\overline{a-x}^{n-1}dx \times x^{m} = 0,$$

откуда, деля на $x^{m-1} \times \overline{a-x}^{n-1}dx$, получим:

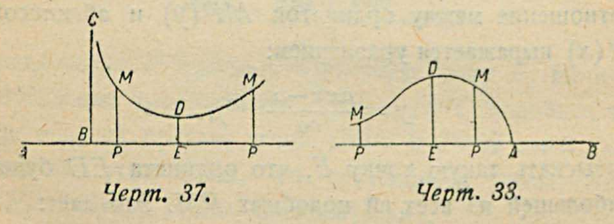
$$am - mx - nx = 0$$

и

$$AE\,(x) = \frac{m}{m+n}\,a.$$

При $m = 2$ и $n = -1$ будем иметь $AE = 2a$. Задача в этом случае формулируется так:

Продолжить данную линию AB (черт. 37) в сторону B до точки E так, чтобы величина $\frac{\overline{AE}^2}{BE}$ была *наименьшей*, а не *наибольшей*. Действительно, урав-



Черт. 37. *Черт. 33.*

нение кривой MDM будет $\frac{xx}{x-a} = y$, и если положить в нем $x = a$, ордината PM, которая обратится в BC, будет $\frac{aa}{0}$, т. е. бесконечно велика, а если положить x бесконечно большим, то будет $y = x$, т. е. ордината будет тоже бесконечно большой,

При $m = 1$ и $n = -2$ будем иметь $AE = -a$, откуда следует, что задачу нужно формулировать таким образом:

Продолжить данную прямую AB (черт. 38) в сторону A до точки E так, чтобы величина $\frac{AE \times \overline{AB}^2}{\overline{BE}^2}$ была наибольшей из всех ей подобных величин: $\frac{AP \times \overline{AB}^2}{\overline{BP}^2}$.

Пример V.

52. Прямая линия AB (черт. 39) разделена на три части AC, CF, FB. Требуется разделить ее среднюю часть CF в точке E так, чтобы отношение прямоугольника $AE \times EB$ к прямоугольнику $CE \times EF$ было наименьшим из всех отношений, полученных тем же способом.

Черт. 39.

Обозначив данные AC через a, CF через b, CB через c, а неизвестную CE через x, будем иметь $AE = a + x$, $EB = c - x$, $EF = b - x$. Следовательно, отношение $AE \times EB$ к $CE \times EF$ будет

$$\frac{ac + cx - ax - xx}{bx - xx},$$

и оно-то должно быть *наименьшим*. Поэтому, если

представить себе кривую линию MDM, у которой соотношение между ординатой $PM\,(y)$ и абсциссой $CP\,(x)$ выражается уравнением:

$$y = \frac{aac + acx - aax - axx}{bx - xx},$$

то вопрос сведется к нахождению для x такого значения CE, чтобы ордината ED была наименьшей из всех ей подобных PM. При этом (после диференцирования и затем деления на $a\,dx$) получается уравнение

$$cxx - axx - bxx + 2acx - abc = 0,$$

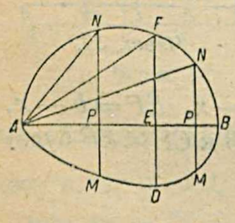
один из корней которого дает решение задачи.

Если $c = a + b$, то $x = \frac{1}{2}b$.

Пример VI.

53. Среди всех конусов, которые могут быть вписаны в шар, определить конус с наибольшей боковой поверхностью.

Вопрос сводится к определению на диаметре AB полукруга AFB (черт. 40) такой точки E, что если провести перпендикуляр EF и соединить A с F, то прямоугольник $AF \times FE$ будет наибольшим из всех аналогичных ему $AN \times \times NP$. Действительно, если представить себе, что полукруг AFB сделает полный оборот вокруг диаметра AB, то ясно, что он при этом образует шар, а прямоуголь-



Черт. 40.

ные треугольники AEF и APN образуют конусы, вписанные в этот шар, боковые поверхности которых, образованные хордами AF и AN, будут относиться между собой, как прямоугольники $AF \times FE$ и $AN \times NP$.

Итак, пусть неизвестная $AE = x$, а данная $AB = a$. По свойству круга $AF = \sqrt{ax}$, $EF = \sqrt{ax - xx}$, и, следовательно, $AF \times FE$, которое должно быть наибольшим, равно $\sqrt{aaxx - ax^3}$. Поэтому надо представить себе такую кривую линию MDM, у которой соотношение между ординатой PM (y) и абсциссой AP (x) выражается уравнением:

$$\frac{\sqrt{aaxx - ax^3}}{a} = y,$$

и отыскать такую точку E, что ордината ED есть наибольшая из всех ей подобных PM.

Диференцируя, получим:

$$\frac{2ax\,dx - 3xx\,dx}{2\sqrt{aaxx - ax^3}} = 0,$$

откуда

$$AE\,(x) = \frac{2}{3}\,a.$$

Пример VII.

54. Требуется среди всех параллелепипедов, равновеликих данному кубу a^3 и имеющих одним из ребер данную прямую b, найти параллелепипед с наименьшей поверхностью.

Если обозначить через x одно из двух искомых ребер, то другое будет $\frac{a^3}{bx}$, и сумма площадей трех различных граней, построенных на ребрах параллелепипеда b, x, $\frac{a^3}{bx}$, а именно

$$bx + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{b}$$

будет половиной его поверхности, которая и должна быть *наименьшей*. Поэтому, образуя, как обычно, кривую линию с уравнением

$$\frac{bx}{a} + \frac{aa}{x} + \frac{aa}{b} = y,$$

посредством диференцирования найдем

$$\frac{b\,dx}{a} - \frac{aa\,dx}{xx} = 0,$$

откуда $xx = \frac{a^3}{b}$ и $x = \sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Таким образом ребрами параллелепипеда, удовлетворяющего условиям, будут: первым b, вторым $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$ и третьим $\sqrt{\frac{a^3}{b}}$. Отсюда видно, что оба искомых ребра равны между собой.

Пример VIII.

55. Теперь требуется среди всех параллелепипедов, равновеликих данному кубу a^3, найти параллелепипед с наименьшей поверхностью.

Из предыдущего примера ясно, что если обозначить одно из неизвестных ребер через x, то каждое

из остальных будет $\sqrt{\frac{a^3}{x}}$; следовательно, сумма трех различных граней параллелепипеда, равная половине его поверхности, будет:

$$\frac{a^3}{x} + 2\sqrt{a^3 x}.$$

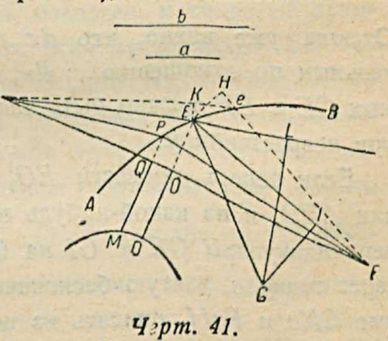
Это выражение и должно быть *наименьшим*. Поэтому его диференциал

$$-\frac{a^3\,dx}{xx} + \frac{a^3\,dx}{\sqrt{a^3 x}} = 0,$$

откуда $x = a$. Следовательно, каждое из двух других ребер также $= a$. Таким образом условиям удовлетворяет сам данный куб.

Пример IX.

56. На плоскости даны две фиксированных точки C и F и линия AEB (черт. 41), к какой-либо точке которой проведены две прямые CP (u) и PF (z). Пусть дана некоторая величина, составленная из этих неопределенных u и z и каких угодно других данных прямых a, b и т. д. Спрашивается, каково должно быть положение прямых CE и EF, чтобы данная составленная из них величина



Черт. 41.

была наибольшей или наименьшей из аналогичных ей величин, составленных из прямых CP и PF.

Предположим, что линии CE и EF имеют требуемое положение, и, соединив C с F, представим себе такую кривую линию DM, что если опустить на CF произвольный перпендикуляр PQM, то ордината QM будет выражать данную величину. Ясно, что, когда точка P попадет в точку E, ордината QM, которая обращается в OD, должна стать наименьшей или наибольшей из всех ей подобных. Значит диференциал ее должен быть равен нулю или бесконечности. Поэтому если, например, данная величина есть $au + zz$, то будем иметь:

$$a\,du + 2z\,dz = 0$$

и, следовательно,

$$du\,.\,-dz : : 2z\,.\,a.$$

Отсюда уже видно, что dz должно быть отрицательным по отношению к du, т. е. положение прямых CE и EF должно быть таким, чтобы z убывало при возрастании u.

Если теперь провести EG, перпендикуляр к линии AEB, и из какой-нибудь его точки G опустить перпендикуляры GL и GI на CE и EF и, проведя через точку e, взятую бесконечно близко к E, прямые CKe и FeH, описать из центров C и F малые круговые дуги EK и EH, то образуются прямоугольные треугольники ELG и EKe, EIG и EHe, подобные между собой. Действительно, если отнять от пря-

мых углов GEe и LEK один и тот же угол LEe, то оставшиеся LEG и KEe будут равны; так же можно доказать, что равны углы IEG и HEe. Итак,

$$GL . GI :: Ke(du) . He(-dz) :: 2z . a.$$

Отсюда следует, что положение прямых CE и EF должно быть таким, что если опустить перпендикуляр EG на линию AEB, то синус GL угла GEC будет относиться к синусу GI угла GEF, как коэфициент при dz к коэфициенту при du. Что и следовало найти [67]).

Следствие.

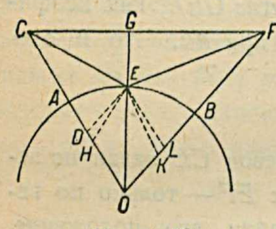
57. Допустим теперь, что отрезок CE задан по величине и положению, а отрезок EF — только по величине, и пусть требуется найти его положение. Ясно, что при данном угле GEC и его синус GL известен, а следовательно, известен и синус GI искомого угла GEF. Значит, если на диаметре EG построить круг и из точки G провести отрезок GI до точки I на окружности, то прямая EF, проходящая через точку I, будет иметь требуемое направление.

Пусть $au + bz$ — данная величина; мы найдем тогда, что $GI = \frac{a \times GL}{b}$. Отсюда видно, что положение EF будет всегда одинаковым, какой бы величины ни задать EC и EF, так как обе они не входят в значение GI, которое поэтому и не изменяется. Если $a = b$, то ясно, что EF совпадает с продолжением CE в сторону E, так как $GL = GI$, когда

точки C и F оказываются по разным сторонам линии AEB; когда же они оказываются по одну ее сторону, то угол FEG (черт. 42) надо взять равным углу CEG.

Пример X.

58. Круг AEB (черт. 42) задан по положению, и даны две точки C и F вне его. Найти на его окружности такую точку E, чтобы сумма прямых CE и EF была возможно наименьшей.



Черт. 42.

Предположим, что точка E есть искомая точка, и проведем из центра O линию OEG; ясно, что она будет перпендикулярна к окружности AEB, и следовательно (§ *57*), углы FEG и CEG будут между собой равны. Значит, если провести EH так, чтобы угол EHO был равен углу CEO, а также EK так, чтобы угол EKO был равен углу FEO, и провести также ED и EL, параллельные OF и OC, то образуются подобные треугольники OCE и OEH, OFE и OEK, HDE и KLE. Обозначив известные OE или OA или OB через a, OC через b, OF через c, а неизвестные OD или LE через x, DE или OL через y, получим:

$$OH=\frac{aa}{b},\quad OK=\frac{aa}{c}$$

и

$$HD\left(x-\frac{aa}{b}\right).DE\,(y)::KL\left(y-\frac{aa}{c}\right).LE\,(x).$$

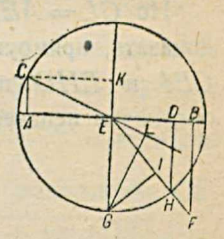
Значит

$$xx - \frac{aax}{b} = yy - \frac{aay}{c};$$

это — уравнение гиперболы, которую легко построить и которая пересекает круг в искомой точке E [68]).

Пример XI.

59. Путешественник, который отправляется из пункта C (черт. 43) в пункт F, должен пересечь две местности, разделенные прямой линией AEB. Предполагается, что в местности со стороны C он в течение времени c проходит пространство a, а в другой местности, со стороны F, в течение того же времени c он проходит пространство b. Спрашивается: через какую точку E на прямой AEB он должен пройти, чтобы затратить возможно меньше времени на переход из C в F. Если взять



Черт. 43.

$$a \,.\, CE\,(u) :: c \,.\, \frac{cu}{a} \quad \text{и} \quad b \,.\, EF\,(z) :: c \,.\, \frac{cz}{b},$$

то ясно, что $\frac{cu}{a}$ будет выражать время, которое путешественник тратит на прохождение прямой CE, а $\frac{cz}{b}$ — время, которое он тратит на прохождение EF, так что $\frac{cu}{a} + \frac{cz}{b}$ должно быть *наименьшим*.

Отсюда следует (§ 56), что если провести EG перпендикулярно к линии AB, то синус угла GEC должен относиться к синусу угла GEF, как a к b.

Итак, если из искомой точки E как из центра описать радиусом EC круг CGH и опустить на прямую AEB перпендикуляры CA, HD и FB, а на CE и EF — перпендикуляры GL и GI, то получится:

$$a \,.\, b :: GL \,.\, GI.$$

Но $GL = AE$ и $GI = ED$, потому что, как легко доказать, прямоугольные треугольники GEL и ECA, GEI и EHD попарно конгруэнтны [69]. Поэтому, обозначив неизвестную AE через x, найдем:

$$ED = \frac{bx}{a},$$

а обозначив известные AB через f, AC через g, BF через h, из подобия треугольников EBF и EDH получим:

$$EB(f - x) \,.\, BF(h) :: ED\left(\frac{bx}{a}\right) . \, DH = \frac{bhx}{af - ax}.$$

Но из прямоугольных треугольников EDH и EAC, имеющих равные гипотенузы EH и EC, получим:

$$\overline{ED}^2 + \overline{DH}^2 = \overline{EA}^2 + \overline{AC}^2,$$

т. е. аналитически

$$\frac{bbxx}{aa} + \frac{bbhhxx}{aaff - 2aafx + aaxx} = xx + gg.$$

Таким образом после освобождения от знаменателей и приведения подобных членов окажется [70]):

$$\begin{array}{llll} aax^4-2aafx^3+aaffxx-2aafggx+aaffgg=0 \\ -bb \quad +2bbf \quad +aagg \\ \qquad\qquad\qquad -bbff \\ \qquad\qquad\qquad -bbhh \end{array}$$

Это же уравнение можно найти еще следующим способом, не прибегая к примеру IX.

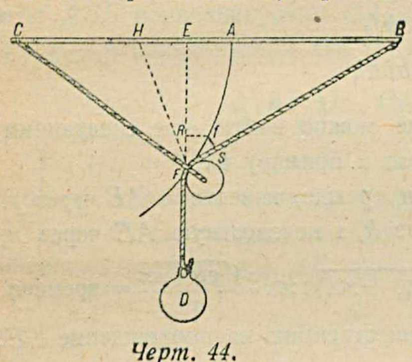
Обозначив, как и прежде, известные AB через f, AC через g, BF через h, а неизвестную AE через x, составим $a\,.\,CE\,(\sqrt{gg+xx})::c\,.\,\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}=$ времени, которое тратит путешественник на прохождение CE. Точно так же $b\cdot EF\;(\sqrt{ff-2fx+xx+hh})::c.$ $\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}=$ времени, которое путешественник тратит на прохождение прямой EF. Это дает, что выражение $\frac{c\sqrt{gg+xx}}{a}+\frac{c\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}{b}=$ *наименьшему*, и, следовательно, его диференциал

$$\frac{cx\,dx}{a\sqrt{gg+xx}}+\frac{cx\,dx-cf\,dx}{b\sqrt{ff-2fx+xx+hh}}=0.$$

Отсюда, деля на $c\,dx$ и освобождаясь от иррациональностей [71]), получим то же уравнение, что и раньше. Один из его корней дает для AE искомое значение) [72].

Пример XII.

60. Пусть блок F (черт. 44) свободно висит на конце веревки CF, привязанной в C, а груз D висит на веревке DFB, проходящей по блоку F и привязанной в B, причем точки C и B находятся на одной горизонтали CB. Спрашивается, в каком положении должен остановиться груз D или блок F, если предполагать, что блок и веревки невесомы.



Черт. 44.

Из принципов механики видно, что груз D опустится как можно ниже под горизонталью CB, откуда следует, что линия до груза DFE должна быть *наибольшей*. Поэтому, обозначив данные CF через a, DFB через b, CB через c, а неизвестную CE через x, получим:

$$EF = \sqrt{aa - xx},$$

$$FB = \sqrt{aa + cc - 2cx}$$

и

$$DFE = b - \sqrt{aa + cc - 2cx} + \sqrt{aa - xx}.$$

Это последнее выражение и должно быть *наибольшим*, и следовательно, его диференциал

$$\frac{c\,dx}{\sqrt{aa+cc-2cx}}-\frac{x\,dx}{\sqrt{aa-xx}}=0,$$

откуда

$$2cx^3-2ccxx-aaxx+aacc=0;$$

деля на $x-c$, получим:

$$2cxx-aax-aac=0.$$

Один из корней этого уравнения дает для CE такое значение, при котором перпендикуляр ED проходит через блок F и груз D, когда они находятся в покое.

Этот же вопрос можно разрешить еще и следующим образом.

Обозначив EF через y, BF через z, будем иметь, что $b-z+y=$ *наибольшему*, и следовательно, $dy=dz$. Ясно, что блок F описывает вокруг точки C как центра круг CFA. Следовательно, если из точки f, взятой бесконечно близко к F, провести fR параллельно CB и fS перпендикулярно BF, то получится:

$$FR=dy \quad \text{и} \quad FS=dz.$$

Значит они будут равны между собой, и следовательно, малые прямоугольные треугольники FRf и FSf, имеющие кроме того общую гипотенузу Ff, будут конгруэнтны. Отсюда видно, что угол RFf

равен углу SFf, т. е. точка F должна быть расположена на окружности FA так, чтобы углы, образуемые прямыми EF и FB с касательными в F, были равны между собой или же (что сводится к тому же) чтобы были равны углы BFC и DFC.

Итак, если провести FH так, чтобы угол FHC был равен углу CFB или CFD, то треугольники CBF и CFH будут подобны так же, как и прямоугольные треугольники ECF и EFH, ибо углы CFE и FHE равны как дополняющие до двух прямых равные углы FHC и CFD. Следовательно,

$$CH = \frac{aa}{C} \text{ и } HE\left(x - \frac{aa}{c}\right) . EF(y) :: EF(y) . EC(x).$$

Значит

$$xx - \frac{aax}{c} = yy = aa - xx,$$

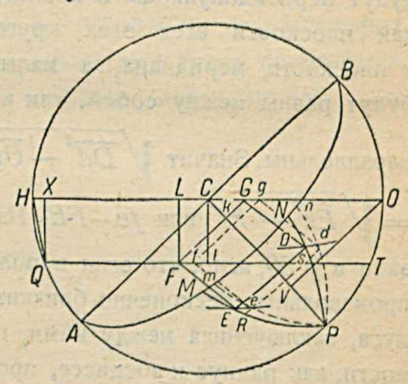
согласно свойству круга, откуда получается то же уравнение, что и прежде [76]).

Пример XIII.

61. Дана высота полюса; найти сутки с самыми короткими сумерками.

Пусть C (черт. 45) — центр сферы; $APTOBHQ$ — меридиан; $HDdO$ — горизонт; $QEeT$ — суточный круг, параллельный горизонту; $AMNB$ — экватор; $FEDG$ — часть параллели экватору, заключенная между плоскостями горизонта и суточного круга и проходимая солнцем в сутки с самыми короткими сумерками;

P — южный полюс; PEM и PDN — четверти кругов склонения. HQ или OT — дуга меридиана, заключенная между горизонтом и суточным кругом, и OP — дуга высоты полюса — даны; даны, следовательно, и линии их синусов CI или FL или QX и OV. Ищется синус CK дуги склонения солнца EM или DN, когда солнце описывает параллель ED.



Черт. 45.

Представим себе другую часть параллели экватору $fedg$, бесконечно близкую к $FEDG$ и четверти круга Pem и Pdn. Ясно, что раз время, которое затрачивается солнцем на прохождение дуги ED, должно быть *наименьшим*, то диференциал измеряющей его дуги MN, которая обращается в mn, когда ED обращается в ed, должен быть равен нулю. Отсюда следует, что малые дуги Mm и Nn, а значит и малые дуги Re и Sd, равны между собой. А так как дуги RE и SD, заключенные между одними и теми же параллелями ED и ed, тоже равны, то углы при S и R — прямые. Значит малые прямоугольные треугольники ERe и DSd (которые ввиду бесконечной малости их сторон можно (§ 3) рассматривать как

прямолинейные) будут конгруэнтны, и следовательно, гипотенузы Ee и Dd будут тоже равны между собой.

Итак, прямые DG, EF, dg и ef, представляющие собой пересечения плоскостей $FEDG$ и $fedg$, параллельных экватору, с горизонтом и суточным кругом, будут перпендикулярны к диаметрам HO и QT, так как плоскости всех этих кругов перпендикулярны к плоскости меридиана, а малые отрезки Gg и Ff будут равны между собой, так как прямые FG и fg параллельны. Значит $\sqrt{\overline{Dd}^2 - \overline{Gg}^2}$ или $DG - dg = \sqrt{\overline{Ee}^2 - \overline{Ff}^2}$ или $fe - FE$. Из того же, что доказано в § 50, ясно, что если в полукруге провести две произвольных бесконечно близких ординаты, то малая дуга, заключенная между ними, относится к их разности, как радиус к абсциссе, проведенной из центра. Это здесь дает (из кругов HDO и QET)

$$CO \,.\, CG :: Dd \text{ или } Ee \,.\, DG - dg \text{ или } fe - FE ::$$
$$:: IQ \,.\, IF :: CO + IQ \text{ или } OX \,.\, CG + IF \text{ или } GL.$$

Но из подобия прямоугольных треугольников CVO, CKG, FLG следует:

$$CO \,.\, CG :: OV \,.\, GK$$

и

$$GK \,.\, GL :: CK \,.\, FL \text{ или } QX.$$

Стало быть по свойству круга

$$OV \,.\, CK :: OX \,.\, XQ :: XQ \,.\, XH,$$

т. е. если взять QX за радиус или полный синус

в прямоугольном треугольнике QXH, в котором угол HQX равен 9 градусам, так как астрономы принимают за HQ дугу в 18 градусов, то получим, что синус высоты полюса относится к синусу южного склонения солнца в сутки с самыми короткими сумерками, как полный синус к тангенсу 9 градусов. Отсюда следует, что если отнять 0,8002875 от логарифма синуса высоты полюса, то остаток будет логарифмом искомого синуса. Что и требовалось найти [74]).

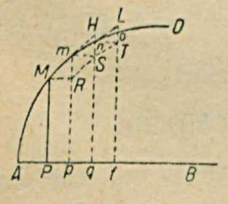
ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НАХОЖДЕНИЮ ТОЧЕК ПЕРЕГИБА И ВОЗВРАТА

ТАК как в дальнейшем придется пользоваться вторыми, третьими и т. д. диференциалами, то необходимо дать о них понятие прежде чем итти дальше.

Определение I.

Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается диференциал переменной величины, называется *диференциалом диференциала* этой величины или ее *вторым диференциалом*. Так, если представить себе третью ординату nq (черт. 46), бесконечно близкую ко второй mp, и провести mS параллельно AB и mH



Черт. 46.

параллельно RS, то Hn будет называться *диференциалом диференциала* Rm или же вторым диференциалом PM.

Если так же представить себе четвертую ординату of, бесконечно близкую к третьей, nq, и провести nT параллельно AB, а nL параллельно ST, то разность малых прямых Hn и Lo будет называться *диференциалом второго диференциала* или же *третьим диференциалом* PM и т. д.

Предупреждение.

В дальнейшем каждый диференциал будет отмечен некоторым числом букв d, *указывающим его порядок или род. Например, второй диференциал, или диференциал второго порядка, будет отмечен посредством* dd; *третий диференциал, или диференциал третьего порядка,— посредством* ddd; *четвертый диференциал, или диференциал четвертого порядка,— посредством* dddd *и т. д.*

Таким образом ddy *будет выражать* Hn, dddy — *выражать* Lo — Hn *или* Hn — Lo *и т. д.*

Что касается степеней этих диференциалов, то они будут отмечены цифрами, стоящими за ними сверху, как это обыкновенно делается при целых величинах. Например dy *в квадрате или в кубе будет* dy^2 *или* dy^3; ddy *в квадрате или в кубе будет* ddy^2 *или* ddy^3, *для* dddy — *будет* $dddy^2$ *или* $dddy^3$; *для* ddddy — *будет* $ddddy^2$ *или* $ddddy^3$ *и т. д.*

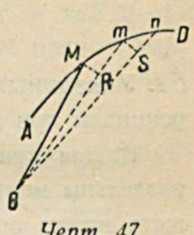
Следствие I.

62. Если обозначить каждую из абсцисс AP, Ap, Aq, Af через x; каждую из ординат PM, pm, qn, fo через y, а каждый из отрезков кривой AM,

Am, An, Ao через u, то ясно, что dx будет выражать диференциалы абсцисс Pp, pq, qf; dy — диференциалы ординат Rm, Sn, To; du — диференциалы отрезков кривой AMD, т. е. Mm, mn, no. Чтобы получить, например, второй диференциал Hn переменной PM, надо представить себе на оси два малых отрезка Pp и pq, а на кривой — два других: Mm и mn, чтобы иметь два диференциала Rm и Sn; и, следовательно, если предположить малые отрезки Pp и pq равными между собой, то ясно, что dx будет постоянным относительно dy и du, потому что Pp, обращаясь в pq, остается неизменным, в то время как Rm, обращаясь в Sn, и Mm, обращаясь в mn, изменяются. Можно было бы предположить, что малые отрезки кривой Mm и mn равны между собой; тогда du оказалось бы постоянным относительно dx и dy; наконец при предположении, что Rm и Sn равны, dy будет постоянным относительно dx и du, и его диференциал Hn (ddy) будет равняться нулю.

Точно так же, чтобы получить третий диференциал PM или диференциал второго диференциала Hn, надо представить себе на оси три малых отрезка Pp, pq, qf, на кривой — три других Hm, mn, no и на ординатах еще три: Rm, Sn, To, и тогда dx или du или dy окажется постоянным в зависимости от того, какие малые отрезки: Pp, pq и qf или Mm, mn и no или Rm, Sn и To будут равны между собой. Таким же образом получаются четвертые, пятые и т. д. диференциалы.

Все это относится также и к кривым AMD (черт. 47), все ординаты которых BM, Bm, Bn выходят из одной фиксированной точки B. Чтобы получить, например, второй диференциал BM, надо представить себе две других ординаты Bm и Bn, образующих бесконечно малые углы MBm и mBn, и описать из центра B малые круговые дуги MR и mS; разность малых прямых Rm и Sn будет вторым диференциалом BM. Постоянными можно считать малые дуги MR и mS или малые отрезки кривой Mm и mn или наконец маленькие прямые Rm и Sn. То же будет и для третьего, четвертого и т. д. диференциалов ординаты BM.



Черт. 47.

Замечание.

63. Следует заметить, что:

1° Существуют бесконечно малые различных порядков; так, например, Rm (черт. 46) бесконечно мала по сравнению с PM и бесконечно велика по сравнению с Hn; точно так же площадь $MPpm$ бесконечно мала по сравнению с площадью APM и бесконечно велика по сравнению с треугольником MRm.

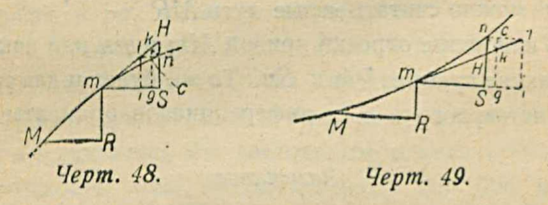
2° Вся разность Pf все еще бесконечно мала по сравнению с AP, так как всякая величина, которая является суммой конечного числа таких величин, как Pp, pq, qf, бесконечно малых по сравнению с некоторой другой величиной AP, остается сама бес-

конечно малой по сравнению с этой величиной, а чтобы она оказалась того же порядка, необходимо, чтобы число величин низшего порядка, из которых она состоит, было бесконечным.

Следствие II.

64. Указанным образом можно найти вторые диференциалы при всевозможных предположениях.

1° Для кривых, ординаты которых mR, nS параллельны между собой (черт. 48, 49), надо продолжить малую прямую Mm до H, где она встречается

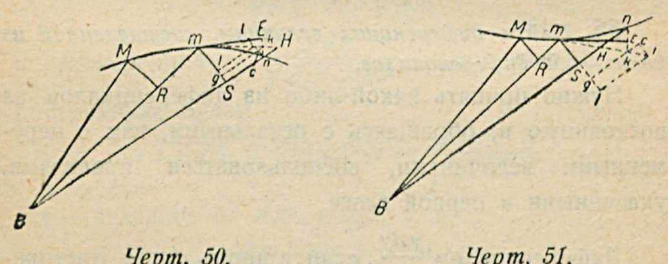


Черт. 48. *Черт. 49.*

с ординатой Sn и, описав из центра m радиусом mn дугу nk, провести малые прямые nl, li, kcg: первую параллельно mS, а две другие параллельно Sn. Если после этого угодно, чтобы dx было постоянным, т. е. чтобы MR было равно mS, то ясно, что треугольники mSH и MRm будут конгруэнтны и таким образом Hn будет ddy, т. е. разностью Rm и Sn, и $Hk = ddu$. Если предположить, что du постоянно, т. е. что $Mm = mn$ или mk, то очевидно, что конгруэнтны будут треугольники mgk и MRm и таким образом $kc = ddy$ и Sg или $cn = ddx$. Если наконец принять постоянным dy, т. е. $mR = nS$,

то будут конгруэнтны треугольники mil и MRm и, таким образом, iS или $nl = ddx$ и $lk = ddu$.

2° Для кривых, ординаты которых BM, Bm и Bn выходят из одной и той же точки B (черт. 50, 51), надо описать из центра B дуги MR и mS и последние рассматривать (§ 3) как малые прямые, перпендикулярные к Bm и Bn. Затем, продолжив Mm до E и описав из центра m радиусом mn малую дугу nkE, следует образовать угол $EmH =$



Черт. 50. *Черт. 51.*

$= mBn$; после того остается провести малые прямые nl, li и kcg, первую — параллельно mS, а две другие параллельно Sn. Треугольник BSm, имеющий прямой угол при S, дает, что угол $BmS + mBn$ или $+ EmH$ равен прямому, следовательно, угол BmE равен прямому $+ SmH$, а в качестве внешнего угла треугольника RMm он равен прямому $MRm + RMm$. Значит угол $SmH = RMm$.

Из этого следует, что: 1° если угодно, чтобы постоянным был dx, т. е. чтобы были равны между собой малые дуги MR и mS, то треугольники SmH и RMm будут конгруэнтны и, таким образом, $Hn = ddy$

и $Hk = ddu$; 2° если взять постоянным du, то конгруэнтны будут треугольники gmk и RMm, и kc будет выражать ddy, и Sg или cn будут выражать ddx; наконец, 3° если принять за постоянный dy, то конгруэнтными будут треугольники iml и RMm, и iS или $ln = ddx$, а $lk = ddu$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

Задача.

65. Найти *диференциал величины, составленной из каких-либо диференциалов.*

Нужно принять какой-либо из диференциалов за постоянную и, обращаясь с остальными, как с переменными величинами, воспользоваться правилами, указанными в первой главе.

Диференциалом $\frac{y\,dy}{dx}$, если принять dx за постоянную, будет:

$$\frac{dy^2 + y\,ddy}{dx},$$

и, если принять dy за постоянную,

$$\frac{dx\,dy^2 - y\,dy\,ddx}{dx^2}.$$

Диференциалом $\frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}$, если принять dx за постоянную, будет:

$$dz\sqrt{dx^2 + dy^2} + \frac{z\,dy\,ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

все — деленное на dx, т. е.:

$$\frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2 + z\,dy\,ddy}{dx\sqrt{dx^2+dy^2}};$$

а если принять dy за постоянную, он будет:

$$dz\,dx\sqrt{dx^2+dy^2} + \frac{z\,dx^2\,ddx}{\sqrt{dx^2+dy^2}} - z\,ddx\sqrt{dx^2+dy^2},$$

все — деленное на dx^2, т. е.:

$$\frac{dz\,dx^3 + dz\,dx\,dy^2 - z\,dy^2\,ddx}{dx^2\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Диференциал $\frac{y\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$, если принять dx за постоянную, будет:

$$\overline{dy^2 + y\,ddy}\sqrt{dx^2+dy^2} - \frac{y\,dy^2\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

все — деленное на dx^2+dy^2, т. е.:

$$\frac{dx^2dy^2 + dy^4 + y\,dx^2\,ddy}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

а если принять dy за постоянную, он будет:

$$\frac{dx^2\,dy^2 + dy^4 - y\,dy\,dx\,ddx}{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Диференциал $\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}$ или $\frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$, если принять dx за постоянную, будет:

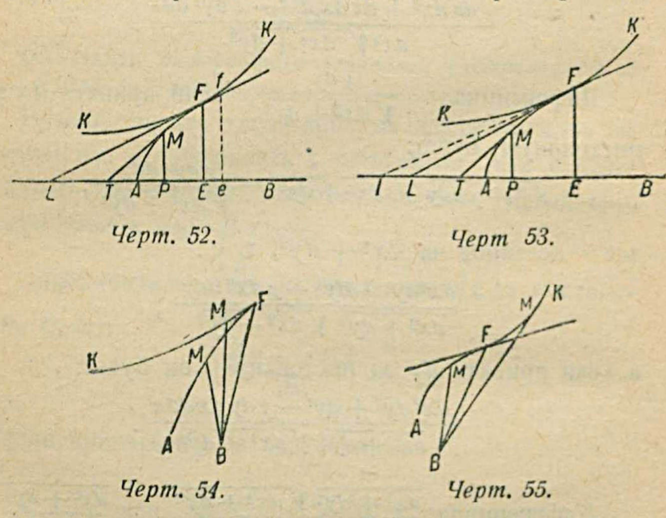
$$\frac{-3dx\,dy\,ddy^2 \times \overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}} + dx\,dddy \times \overline{dx^2+dy^4}^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,ddy^2}.$$

Но следует заметить, что в последнем случае мы не имеем права принять dy за постоянную, так как

при этом предположении его диференциал ddy был бы нулем, и следовательно, не мог бы входить в предлагаемую величину.

Определение II.

Когда одна часть кривой линии AFK (черт. 52, 53, 54, 55) вогнута, а другая часть выпукла по отношению к прямой линии AB или к фиксированной



Черт. 52. Черт 53. Черт. 54. Черт. 55.

точке B, то точка F, отделяющая вогнутую часть от выпуклой и, следовательно, являющаяся концом одной из них и началом другой, называется точкой *перегиба*, если кривая, дойдя до F, продолжает свой путь в том же направлении, и точкой *возврата*, — если она возвращается в сторону своего начала [75].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

Общая задача.

66. Природа *кривой AFK известна. Определить точку перегиба или возврата F.*

Предположим сперва, что кривая линия AFK (черт. 52, 53) имеет диаметром прямую линию AB и что все ее ординаты PM, EF и т. д. параллельны между собой. Если через точку F провести ординату FE и касательную FL, а через какую-либо точку M на части AF — ординату MP и касательную MT, то ясно, что:

1° У кривых, имеющих точку перегиба, при непрерывном возрастании абсциссы AP часть диаметра AT, заключенная между его пересечением с касательной и началом отсчета x, тоже возрастает до совпадения точки P с E, после чего она убывает. Отсюда видно, что AT, соответствующая ординате в P, должна быть *наибольшей*, AL, когда точка P попадает в искомую точку E.

2° У кривых, имеющих точку возврата, при непрерывном возрастании части AT абсцисса AP тоже возрастает, пока точка T не попадет в L, после чего она убывает. Отсюда видно, что AP, соответствующая AT, должна стать *наибольшей*, AE, когда точка T попадет в L.

Итак, обозначив AE через x, EF через y, будем иметь:

$$AL = \frac{y\,dx}{dy} - x,$$

диференциал чего

$$\frac{dy^2\,dx - y\,dx\,ddy}{dy^2} - dx$$

(dx предполагается постоянным), деленный на dx, диференциал AE, должен равняться (§ 47) нулю или бесконечности. Это дает, что

$$-\frac{y\,ddy}{dy^2} = 0 \text{ или бесконечности},$$

а после умножения на dy^2 и деления на $-y$ получается, что

$$ddy = 0 \text{ или бесконечности.}$$

В дальнейшем это будет служить общей формулой для нахождения точек перегиба или возврата F. Действительно, зная природу кривой AFK, можно выразить величину dy через dx и, продиференцировав ее, предполагая dx постоянным, найти выражение величины ddy через dx^2. Приравнивание этой величины сначала нулю, а затем бесконечности послужит при том или другом из этих предположений для нахождения такого значения AE, при котором ордината EF пересекает кривую AFK в точке перегиба или возврата F.

A, начало отсчета x, может быть расположено так, что

$$AL = x - \frac{y\,dx}{dy},$$

вместо

$$\frac{y\,dx}{dy} - x,$$

и что AL или AE вместо *наибольшего* окажется

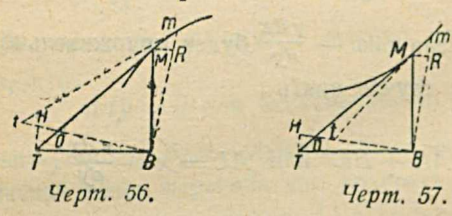
наименьшим. Но так как выводы остаются прежними и не представляют никаких затруднений, то я на этом останавливаться не буду. Надо заметить, что AL никогда не может быть $=x+\frac{y\,dx}{dy}$, потому что, когда точка T оказывается по другую сторону от P относительно A — начала отсчета x, величина $\frac{y\,dx}{dy}$ согласно *§ 10* будет отрицательной, а следовательно, величина $-\frac{y\,dx}{dy}$ будет положительной, так что в этом случае опять

$$AE+EL \text{ или } AL=x-\frac{y\,dx}{dy}.$$

То же самое можно еще найти и другим способом. Ясно, что если принять dx за постоянную и предположить, что ордината y возрастает, то Sn (черт. 48, 49) будет меньше SH или Rm в вогнутой части и больше — в выпуклой. Отсюда видно, что у точки перегиба или возврата F величина $Hn\,(ddy)$ должна из положительной стать отрицательной, и следовательно, в этой точке она должна быть либо нулем, либо бесконечностью [76]).

Предположим, во-вторых, что ординатами кривой AFK (черт. 54, 55) являются прямые BM, BF, BM, выходящие все из одной точки B. Если провести произвольную ординату BM (черт. 56, 57) и касательную MT, встречающую BT, перпендикулярную к BM, в точке T и, взяв точку m бесконечно близко

к M, провести ординату Bm, касательную mt, а также Bt — перпендикуляр к Bm, который встречает MT в O, то очевидно (предполагая, что ордината BM возрастает, обращаясь в Bm), что Bt превосходит BO в вогнутой части и, наоборот, она меньше ее в выпуклой части. Таким образом у точки перегиба или возврата F величина Ot должна из положительной стать отрицательной.



Черт. 56. Черт. 57.

Если описать из центра B (черт. 56) малые круговые дуги MR и TH, то образуются подобные треугольники mRM, MBT и THO и малые подобные секторы BMR и BTH. Поэтому, обозначив BM через y, MR через x, мы будем иметь:

$$mR\,(dy)\,.\,RM\,(dx) :: BM\,(y)\,.\,BT = \frac{y\,dx}{dy} ::$$

$$: MR\,(dx)\,.\,TH = \frac{dx^2}{dy} :: TH\left(\frac{dx^2}{dy}\right).\,HO = \frac{dx^3}{dy^2}\ ^{77}).$$

Если продиференцировать $BT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)$, предполагая dx постоянным, то получится:

$$Bt - BT \text{ или } Ht = \frac{dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}{dy^2},$$

и, следовательно,

$$OH + Ht \text{ или } Ot = \frac{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}{dy^2}.$$

Отсюда, после умножения на dy^2 и деления на dx, получается, что в точке перегиба или возврата F величина

$$dx^2 + dy^2 - y\,ddy$$

равняется нулю или бесконечности. Поскольку природа линии AFK (черт. 54, 55) известна, величину dy можно выразить через dx, а ddy через dx^2. Подстановка этих значений в

$$dx^2 + dy^2 - y\,ddy$$

дает величину, приравнивание которой сначала нулю, а затем бесконечности послужит для нахождения такого значения BF, что круг, описанный радиусом BF из центра B, пересечет кривую AFK в точке перегиба или возврата F. Что и было предложено [78]).

Чтобы найти то же самое еще другим способом, надо заметить, что в вогнутой части угол BmE (черт. 50, 51) превосходит угол Bmn, и наоборот, он меньше его в выпуклой части, следовательно, угол $BmE - Bmn$ или Emn (черт. 50), т. е. измеряющая его дуга En у искомой точки F становится из положительной отрицательной. Если принять dx за постоянную, то подобные прямоугольные треугольники HmS и Hnk дадут:

$$Hm\,(du)\,.\,mS\,(dx) :: Hn\,(-ddy)\,.\,nk = -\frac{dx\,ddy}{du},$$

причем следует отметить, что величина Hn отрицательна, так как $Rm\,(dy)$, при возрастании $Bm\,(y)$ убывает. Но из подобия секторов BmS и mEk получается, что

$$Bm\,(y) \,.\, mS\,(dx) :: mE\,(du) \,.\, Ek = \frac{dx\,du}{y}.$$

Следовательно,

$$Ek + kn \text{ или } En = \frac{dx\,du^2 - y\,dx\,ddy}{y\,du}.$$

Отсюда, после умножения на $y\,du$ и деления на dx, следует, что у искомой точки F

$$du^2 - y\,ddy \text{ или } dx^2 + dy^2 - y\,ddy$$

из положительного становится отрицательным (см. черт. 54, 55).

Если предположить, что y становится бесконечно большим, то члены dx^2 и dy^2 будут ничем по сравнению с членом $y\,ddy$, и следовательно, формула

$$dx^2 + dy^2 - y\,ddy = 0 \text{ или бесконечности}$$

обратится в другую:

$$-y\,ddy = 0 \text{ или бесконечности,}$$

или, если разделить на $-y$,

$$ddy = 0 \text{ или бесконечности.}$$

Это — та же формула, что и в первом случае, что и должно было получиться, потому что ординаты BM, BF, BM становятся тогда параллельными.

Следствие.

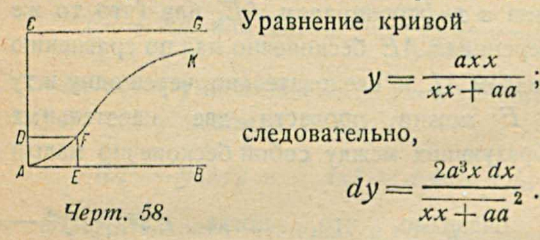
67. Ясно, что, когда $ddy=0$, диференциал AL (черт. 52) должен быть ничем по сравнению с диференциалом AE, и следовательно, две бесконечно близких касательных FL и fL должны совпасть, образуя одну прямую линию fFL. Но, когда $ddy=$ бесконечности, диференциал AL (черт. 53) должен быть бесконечно велик по сравнению с диференциалом AE, или (что то же самое) диференциал AE бесконечно мал по сравнению с диференциалом AL, и следовательно, через одну и ту же точку F можно провести две касательных FL и Fl, образующих между собой бесконечно малый угол LFl.

Так же очевидно, что, когда $dx^2+dy^2-ydy=0$, Ot (черт. 56, 57) должно стать ничем по сравнению с MR и что таким образом две бесконечно близких касательных MT и mt должны совпасть, когда точка M становится точкой перегиба или возврата. Если же, наоборот, $dx^2+dy^2-yddy=$ бесконечности, то Ot должно быть бесконечно по сравнению с MR, или (что то же самое) MR бесконечно малым по сравнению с Ot, следовательно, точка m должна совпасть с точкой M; т. е., когда точка M становится точкой перегиба или возврата, через нее можно провести две касательных, образующих между собой бесконечно малый угол.

Очевидно, что, если продолжить касательную в точке перегиба или возврата F, то она в этой точке будет и касаться кривой AFK и пересекать ее [79]).

Пример I.

68. Пусть кривая линия AFK (черт. 58) имеет диаметром прямую линию AB и такова, что соотношение между абсциссой $AE\,(x)$ и ординатой $EF\,(y)$ выражается уравнением $axx = xxy + aay$. Требуется найти такое значение AE, при котором ордината EF встречается с кривой AFK в точке перегиба F.



Черт. 58.

Уравнение кривой

$$y = \frac{axx}{xx + aa};$$

следовательно,

$$dy = \frac{2a^3x\,dx}{\overline{xx + aa}^2}.$$

Если, полагая dx постоянным, найти диференциал этой величины и затем приравнять его нулю, то получится:

$$\frac{2a^3dx^2 \times \overline{xx + aa}^2 - 8a^3xx\,dx^2 \times \overline{xx + aa}}{\overline{xx + aa}^4} = 0,$$

что, умноженное на $\overline{xx + aa}^4$ и деленное на $2a^3\,dx^2 \times \overline{xx + aa}$, дает:

$$xx + aa - 4xx = 0,$$

откуда

$$AE\,(x) = a\sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Если в уравнение кривой

$$y = \frac{axx}{xx + aa}$$

подставить вместо xx его величину $\frac{1}{3}aa$, то получится:

$$EF\,(y)=\frac{1}{4}a,$$

так что точку перегиба F можно определить, не описывая кривой AFK.

Если параллельно ординатам EF провести AC, равную данной прямой a, а CG провести параллельно AB, то она [CG] будет асимптотой кривой AFK. Действительно, предполагая x бесконечно большим, можно вместо $xx+aa$ взять xx, а тогда уравнение кривой

$$y=\frac{axx}{xx+aa}$$

обратится в

$$y=a$$ [80]).

Пример II.

69. Пусть $y-a=\overline{x-a}^{\frac{3}{5}}$. Значит

$$dy=\frac{3}{5}\overline{x-a}^{-\frac{2}{5}}dx,$$

и, принимая dx за постоянную,

$$ddy=-\frac{6}{25}\overline{x-a}^{-\frac{7}{5}}dx^2=\frac{-6dx^2}{25\sqrt[5]{\overline{x-a}^{7}}}.$$

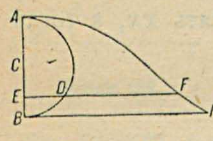
Так как приравнивание этой дроби нулю, при котором получается $-6dx^2=0$, ничего не дает, то ее

надо взять бесконечно большой, а следовательно, ее знаменатель $25\sqrt[5]{x-a}^{7}$ — бесконечно малым или равным нулю. Отсюда неизвестная

$$AE(x)=a.$$

Пример III.

70. Пусть AFK — удлиненная полуциклоида (черт. 59), основание которой BK больше ADB — полуокружности образующего круга, имеющего центром точку C. Требуется определить на диаметре AB точку E так, чтобы ордината EF встречалась с циклоидой в точке перегиба F.



Черт. 59.

Обозначив известные ADB через a, BK через b, AB через $2c$, а неизвестные AE через x, ED через z, дугу AD через u, EF через y, получим из свойства циклоиды:

$$y=z+\frac{bu}{a}$$

и, следовательно,

$$dy=dz+\frac{bdu}{a}.$$

Далее из свойства круга получим:

$$z=\sqrt{2cx-xx},$$

$$dz=\frac{cdx-xdx}{\sqrt{2cx-xx}}$$

и

$$du\left(\sqrt{dx^2+dz^2}\right)=\frac{cdx}{\sqrt{2cx-xx}}.$$

Подставляя вместо dz и du их значения, найдем:

$$dy = \frac{ac\,dx - ax\,dx + bc\,dx}{a\sqrt{2cx - xx}}.$$

Диференциал этого (dx принимается постоянным) дает:

$$\frac{bcx - acc - bcc \times dx^2}{2cx - xx \times \sqrt{2cx - xx}} = 0,$$

откуда

$$AE(x) = c + \frac{ac}{b}$$

и

$$CE = \frac{ac}{b}.$$

Ясно, что для существования точки перегиба F надо, чтобы b превосходило a, так как если бы оно было меньше его, то CE было бы больше CB[81]).

Пример IV.

71. Найти точку перегиба F конхоиды Никомеда AFK, которая имеет полюсом точку P, а асимптотой — прямую BC. Она обладает тем свойством, что если провести прямую PF, соединяющую полюс P с произвольной точкой F на конхоиде и пересекающую асимптоту BC в D, то отрезок DF всегда равен данной прямой a.

Проведем PA перпендикулярно, а FE параллельно BC, обозначим известные AB или FD через a, BP через b, а неизвестные BE через x, EF через y

и проведем DL параллельно BA. Подобные треугольники DLF и PEF дают:

$$DL(x) . LF(\sqrt{aa-xx}) :: PE(b+x) . EF(y) =$$

$$= \frac{\overline{b+x}\sqrt{aa-xx}}{x},$$

а диференциал последнего

$$dy = -\frac{x^3\,dx + aab\,dx}{xx\sqrt{aa-xx}}.$$

Значит, если взять диференциал этой величины и приравнять его нулю, то получится равенство:

$$\frac{\overline{2a^4b - aax^3 - 3aabxx} \times dx^2}{\overline{aax^3 - x^5} \times \sqrt{aa-xx}} = 0,$$

которое приводится к

$$x^3 + 3bxx - 2aab = 0.$$

Один из корней этого уравнения даст для BE искомое значение.

При $a = b$ предыдущее уравнение обратится в другое:

$$x^3 + 3axx - 2a^3 = 0,$$

которое после деления на $x + a$ дает:

$$xx + 2ax - 2aa = 0,$$

и следовательно,

$$BE(x) = -a + \sqrt{3aa}.$$

ИНАЧЕ.

Принимаем за ординаты линии PF, выходящие из полюса P, и пользуемся формулой (§ 66):

$$y\,ddy = dx^2 + dy^2,$$

в которой dx предполагается постоянным. Представим себе другую ординату Pf, образующую с PF бесконечно малый угол FPf, и, описав из центра P малые дуги FG и DH, обозначим известные AB через a, BP через b, а неизвестные PF через y, PD через z. Из свойства конхоиды получится $y = z + a$, что дает $dy = dz$. Далее, из прямоугольного треугольника DBP

$$DB = \sqrt{zz - bb},$$

а из подобных треугольников DBP и dHD, PDH и PFG будем иметь:

$$DB(\sqrt{zz - bb}) \,.\, BP(b) :: dH\,(dz) \,.\, HD = \frac{b\,dz}{\sqrt{zz - bb}}$$

и

$$PD\,(z) \,.\, PF\,(z + a) :: HD\left(\frac{b\,dz}{\sqrt{zz - bb}}\right) \,.\, FG\,(dx) =$$

$$= \frac{bz\,dz + ab\,dz}{z\sqrt{zz - bb}}.$$

Отсюда

$$dz \text{ или } dy = \frac{z\,dx\sqrt{zz - bb}}{bz + ab},$$

а его диференциал (dx предполагается постоянным):

$$ddy = \frac{\overline{bz^3 + 2abzz - ab^3} \times dz\,dx}{\overline{bz + ab}^2 \sqrt{zz - bb}} =$$

$$= \frac{\overline{bz^4 + 2abz^3 - ab^3z} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^3},$$

если подставить вместо dz его значение. Значит, если в общую формулу (*§ 66*)

$$y\,ddy = dx^2 + dy^2$$

подставить вместо y его значение $z + a$, и вместо dy и ddy — их значения, выраженные через dx и dx^2, то получится такое уравнение:

$$\frac{\overline{z^4 + 2az^3 - abbz} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^2} = \frac{\overline{z^4 + 2abbz + aabb} \times dx^2}{\overline{bz + ab}^2},$$

приводящееся к [уравнению]

$$2z^3 - 3bbz - abb = 0,$$

один из корней которого, увеличенный на a, даст значение неизвестной PF.

При $a = b$ будем иметь:

$$2z^3 - 3aaz - a^3 = 0,$$

что после деления на $z + a$ даст:

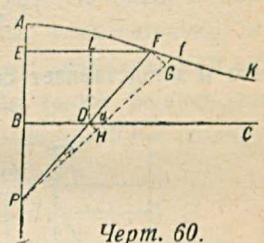
$$zz - az - \frac{aa}{2} = 0.$$

Решив это уравнение, получим:

$$PF\,(z + a) = \frac{3}{2}\,a + \frac{1}{2}\,a\sqrt{3} = \frac{3a + a\sqrt{3}}{2}\ [82].$$

Пример V.

72. Пусть AFK — конхоида другого рода (черт. 60), такая, что если соединить какую-либо ее точку F с полюсом P посредством прямой PF, пересекающей асимптоту BC в D, то прямоугольник $PD \times DF$ всегда равен прямоугольнику $PB \times BA$. Найти точку перегиба F.



Черт. 60.

Если обозначить неизвестные BE через x, EF через y, а известные AB через a, BP через b, то получится $PD \times DF = ab$, и параллельные BD и EF дадут:

$$PD \times DF\,(ab) \,.\, PB \times BE\,(bx) ::$$

$$:: \overline{PF}^2\,(bb + 2bx + xx + yy) \,.\, \overline{PE}^2\,(bb + 2bx + xx)$$

Значит

$$bbx + 2bxx + x^3 + yyx = abb + 2abx + axx$$

или

$$yy = \frac{abb + 2abx + axx - bbx - 2bxx - x^3}{x}$$

и

$$y = \overline{b + x}\,\frac{\sqrt{a - x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{ax - xx} + b\sqrt{\frac{a - x}{x}},$$

диференциал чего есть:

$$dy = \frac{-ax\,dx + 2xx\,dx + ab\,dx}{2x\sqrt{ax - xx}}.$$

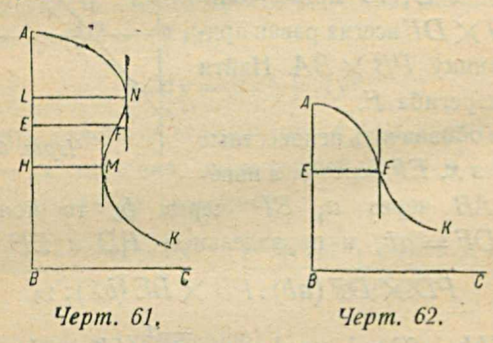
Диференцируя еще раз, образуем равенство:

$$\frac{\overline{3aab - aax - 4abx} \times dx^2}{\overline{4ax - 4xx} \times \sqrt{ax - xx}} = 0,$$

которое приводится к

$$x = \frac{3ab}{a + 4b},$$

что и представляет собой значение неизвестной BE.



Черт. 61. *Черт. 62.*

Если

$$\frac{-ax\,dx + 2xx\,dx + ab\,dx}{2x\sqrt{ax - xx}},$$

значение dy приравнять нулю то получится:

$$xx - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}ab = 0,$$

два корня которого

$$\frac{a + \sqrt{aa - 8ab}}{4} \quad \text{и} \quad \frac{a - \sqrt{aa - 8ab}}{4}$$

дают при a, большем $8b$, два таких значения BH и BL, что ордината HM (черт. 61) оказывается меньше своих соседних, а ордината LN — больше, т. е. что

касательные в M и N параллельны оси AB; при этом точка E оказывается между точками H и L.

Когда $a = 8b$, каждая из линий BH, BE, BL (черт. 62) равняется $\frac{1}{4}a$, и тогда касательная в точке перегиба F параллельна оси AB. Наконец, когда a меньше $8b$, оба корня мнимы, следовательно, никакая касательная не сможет быть параллельной оси.

Эту задачу можно было бы также решить, взяв за ординаты линии PF, Pf (черт. 60), выходящие из полюса P, и пользуясь формулой

$$y\,ddy = dx^2 + dy^2,$$

как было сделано в предыдущем примере[83]).

Пример VI.

73. Пусть AED (черт. 63) — круг с центром в точке B, а AFK — такая кривая линия, что если провести произвольный радиус BFE, то квадрат на FE будет равен прямоугольнику из дуги AE и данной прямой b. Надо определить на этой кривой точку перегиба F.

Черт. 63.

Обозначив дугу AE через z, радиус BA или BE через a и ординату BF через y, получим:

$$bz = aa - 2ay + yy$$

и (диференцируя)

$$\frac{2y\,dy - 2a\,dy}{b} = dz = Ee.$$

Из подобия секторов BEe и BFG получится:

$$BE(a) . BF(y) :: Ee\left(\frac{2y\,dy - 2a\,dy}{b}\right) . FG(dx) =$$

$$= \frac{2yy\,dy - 2ay\,dy}{ab}.$$

Диференциал этого, при предположении, что dx постоянно, дает:

$$4y\,dy^2 - 2a\,dy^2 + 2yy\,ddy - 2ay\,ddy = 0.$$

Следовательно,

$$y\,ddy = \frac{a\,dy^2 - 2y\,dy^2}{y - a}.$$

Значит, если в общую формулу (*§ 66*)

$$y\,ddy = dx^2 + dy^2$$

вместо dx^2 и $y\,ddy$ подставить их выражения через dy^2, то получится уравнение:

$$\frac{a\,dy^2 - 2y\,dy^2}{y - a} = \frac{4y^4\,dy^2 - 8ay^3\,dy^2 + 4aayy\,dy^2 + aabb\,dy^2}{aabb}.$$

Оно приводится к уравнению:

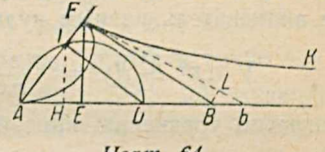
$$4y^5 - 12ay^4 + 12aay^3 - 4a^3yy + 3aabby - 2a^3bb = 0,$$

решение которого даст для BF искомую величину.

Очевидно, что кривая AFK, которую можно назвать *параболической спиралью*, должна иметь точку перегиба F. Так как сначала окружность AED незаметно отличается от касательной в точке A, то по свойству параболы она вначале должна быть вогнута по отношению к этой касательной, а дальше, когда кривизна окружности относительно ее центра станет заметной, она станет вогнутой относительно центра [81]).

Пример VII.

74. Пусть кривая линия AFK (черт. 64), имеющая осью прямую AB, обладает тем свойством, что если провести произвольную касательную FB, встречающуюся с AB в точке B, то отсекаемая часть AB всегда имеет к касательной BF данное отношение m к n. Требуется определить точку возврата F.



Черт. 64.

Обозначив неизвестные и переменные AE через x, EF через y, будем иметь:

$$EB = -\frac{y\,dx}{dy}$$

(потому что y убывает при возрастании x),

$$FB = \frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}.$$

А по свойству кривой

$$AE + EB \text{ или } AB\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{dy}\right).BF\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right) :: m\,.\,n.$$

Значит

$$m\sqrt{dx^2+dy^2} = \frac{nx\,dy}{y} - n\,dx,$$

диференциал чего, в предположении, что dx постоянно и отрицательно, дает:

$$\frac{m\,dy\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}} = \frac{-ny\,dx\,dy + nxy\,ddy - nx\,dy^2}{yy};$$

откуда

$$ddy = \frac{\overline{-ny\,dx\,dy - nx\,dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{myy\,dy - nxy\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Приравняв теперь эту дробь нулю, найдем:

$$-y\,dx - x\,dy = 0,$$

что не дает возможности что-либо узнать. Поэтому эту дробь надо положить равной бесконечности, т. е. ее знаменатель равным нулю, что дает:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = \frac{my\,dy}{nx} = \frac{nx\,dy - ny\,dx}{my},$$

согласно уравнению кривой. Отсюда

$$dx = \frac{nnxx\,dy - mmyy\,dy}{nnxy}.$$

Возводя обе части уравнения

$$my\,dy = nx\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

в квадрат, найдем опять:

$$dx = \frac{dy\sqrt{mmyy - nnxx}}{nx} = \frac{nnxx\,dy - mmyy\,dy}{nnxy},$$

откуда наконец

$$y\sqrt{mm - nn} = nx.$$

Это дает следующее построение.

Опишем на диаметре $AD = m$ полукруг AID и, взяв хорду $DI = n$, проведем прямую AI. Я утверждаю, что она встретится с кривой AFK в точке возврата F.

Действительно, если провести IH перпендикулярно AB, подобные прямоугольные треугольники DIA, IHA и FEA дадут, что

$$DI(n)\,.\,IA(\sqrt{mm - nn}) :: IH\,.\,HA :: FE(y)\,.\,EA(x);$$

следовательно,

$$y\sqrt{mm - nn} = nx,$$

а это и требовалось построить.

Ясно, что BF параллельна DI, так как

$$AB\,.\,BF::AD\,(m)\,.\,DI\,(n),$$

откуда следует, что AFB — прямой угол; и стало быть линии AB, BF, BE образуют непрерывную пропорцию.

То же свойство можно найти и без всяких выкладок, если представить себе (§ 67) в точке возврата F две касательных FB и Fb, образующих между собой бесконечно малый угол BFb. Действительно, описав из центра F малую дугу BL, будем иметь:

$$m\,.\,n::Ab\,.\,bF::AB\,.\,BF::$$

$$::Ab-AB \text{ или } Bb\,.\,bF-BF \text{ или } bL::BF\,.\,BE,$$

из подобия прямоугольных треугольников BbL и FBE Значит, и т. д.

При $m=n$ прямая AF, очевидно, становится перпендикулярной к оси AB, а касательная FB, таким образом, становится параллельной этой оси. Этого и следовало ожидать, потому что в этом случае кривая AF обращается в полукруг с диаметром, перпендикулярным оси AB. Если же m меньше, чем n, то, очевидно, точки возврата вовсе не будет, потому что тогда уравнение

$$y\sqrt{mm-nn}=nx$$

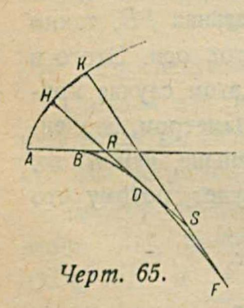
будет содержать в себе противоречие

ГЛАВА V.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НАХОЖДЕНИЮ РАЗВЕРТОК.

Определение.

ПРЕДПОЛОЖИМ, что некоторая кривая линия BDF (черт. 65), вогнутая всюду с одной и той же стороны, обернута или окружена нитью $ABDF$, один из концов которой закреплен в F, а другой натянут вдоль касательной BA, и заставим конец A, оставляя его натянутым, двигаться, непрерывно развертывая кривую BDF. Ясно, что при этом движении конец нити A описывает кривую линию AHK.



Черт. 65.

При таких условиях кривая BDF будет называться *разверткой* кривой AHK.

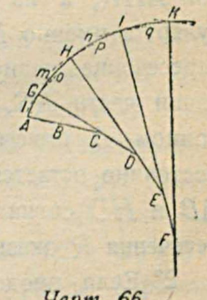
AB, HD, KF, прямолинейные части нити $ABDF$, будут называться *радиусами развертки* [85]).

Следствие I.

75. Из того, что длина нити $ABDF$ остается неизменной, следует, что отрезок кривой BD равен разности радиусов в ее концах DH и BA; точно так же отрезок кривой DF равен разности радиусов FK и DH, а вся кривая BDF — разности радиусов FK и BA. Отсюда видно, что если BA, радиус кривой, равен нулю, т. е. конец нити A совпадает с B, началом кривой BDF, то радиусы развертки DH и FK будут равны отрезкам BD и BDF кривой BDF.

Следствие II.

76. Если рассматривать кривую BDF (черт. 66) как многоугольник $BCDEF$ с бесконечным множеством сторон, то ясно, что конец A нити $ABCDEF$ будет описывать малую дугу AG с центром в точке C до тех пор, пока радиус CG не сольется в одну прямую линию с малой стороной CD, соседней с CB; затем этот же конец будет описывать малую дугу GH с центром в точке D до тех пор, пока радиус DH не сольется в одну прямую с малой стороной DE,



Черт. 66.

и так далее, пока кривая $BCDEF$ не развернется целиком. Таким образом кривую AHK можно рассматривать как совокупность бесконечного множества

малых круговых дуг AG, GH, HI, IK и т. д. с центрами в точках C, D, E, F и т. д. Отсюда вытекает следующее:

1° Радиусы развертки непрерывно ее касаются, как DH в D, KF в F и т. д. Далее, все они перпендикулярны к описываемой ими кривой AHK, как DH в H, FK в K и т. д. Действительно, например, DH перпендикулярен к малым дугам GH и HI, потому что он проходит через их центры D и E. Отсюда видно, что: 1° развертка BDF (черт. 65) ограничивает пространство, в которое попадают все перпендикуляры кривой AHK; 2° если продолжить какой-нибудь радиус HD, пересекающий радиус AB в R, до пересечения с каким-нибудь другим радиусом KF в S, то всегда можно из всех точек части RS кроме точки касания D провести два перпендикуляра к кривой AHK, а из точки D — только один перпендикуляр, а именно DH. Действительно ясно, что R — пересечение радиусов AB и DH — пробегает все точки части RS, в то время как радиус AB своим концом A описывает линию AHK, к которой он постоянно остается перпендикулярным, и что радиусы AB и HD совпадают только тогда, когда точка пересечения R оказывается в точке касания D.

2° Если продолжить в сторону начала развертывания A малые дуги HG (черт. 66) до l, IH до m, KI до n и т. д., то каждая малая дуга, как, например, IH, будет касаться извне соседней HG, так как радиусы CA, DG, EH, FI все возрастают, по мере того как малые дуги, составляющие кривую AHK

удаляются от точки A. По этой же причине, если продолжить малые дуги AG до o, GH до p, HI до q в сторону, противоположную от A, то каждая малая дуга, как, например, HI, будет касаться изнутри своей соседней IK. А так как, вследствие бесконечной малости как дуги HI, так и стороны DE, точки H и I, D и E можно считать совпадающими, то, если описать из какой-либо внутренней точки D развертки BDF, как из центра, ее радиусом DH круг mHp, он будет касаться извне части HA, которая окажется целиком внутри этого круга, и изнутри — другой части HK, которая окажется целиком вне этого круга, т. е. он будет и касаться кривой AHK и пересекать ее в одной и той же точке H, подобно тому как касательная в точке перегиба пересекает кривую в этой же точке.

3° Из того, что радиус HD малой дуги HG отличается от радиусов CG и EH соседних дуг GA и HI лишь на бесконечно малую величину CD или DE, следует, что как мало бы ни уменьшить радиус DH, он окажется меньше CG и его круг будет касаться изнутри части HA. Наоборот, как мало бы его ни увеличить, он окажется больше HE и его круг будет касаться извне части HK. Таким образом круг mHp является наименьшим из кругов, касающихся извне части HA, и, наоборот, наибольшим из кругов, касающихся изнутри части HK, т. е. между этим кругом и кривой нельзя провести никакой другой круг.

4° Так как кривизна кругов возрастает пропорционально убыванию радиусов, то кривизна малой дуги *HI* относится к кривизне малой дуги *AG*, как радиус этой последней *BA* или *CA* к ее радиусу *DH* или *EH*, т. е. кривизна кривой *AHK* в *H* относится к ее кривизне в *A*, как радиус *BA* к радиусу *DH*, а также кривизна в *K* относится к кривизне в *H*, как радиус *DH* к радиусу *FK*. Отсюда видно, что кривизна линии *AHK* непрерывно убывает по мере развертывания линии *BDF*, так что она имеет наибольшую возможную величину в точке *A*, из которой начинается развертывание, и наименьшую в точке *K*, в которой, как я это предполагаю, оно прекращается.

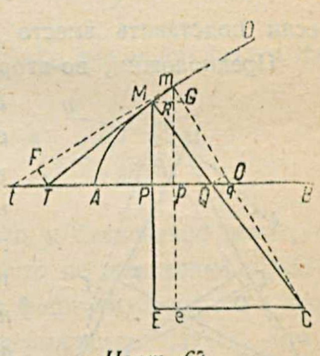
5° Точки развертки суть не что иное, как пересечения перпендикуляров, проведенных через концы малых дуг, составляющих кривую *AHK*. Например, точка *D* или *E* есть пересечение *HD* и *IE* — перпендикуляров малой дуги *HI*. Таким образом если даны кривая *AHK* и положение одного из ее перпендикуляров *HD*, то, чтобы найти точку *D* или *E* его прикосновения к развертке, надо лишь отыскать точку пересечения бесконечно близких перпендикуляров *HD* и *IE*, что и будет разъяснено в следующей задаче [86]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

Общая задача.

77. Природа *кривой линии* AMD (черт. 67) *известна, и дан какой-либо из ее перпендикуляров* MC; *определить длину ее радиуса развертки* MC, *т. е. пересечение бесконечно близких перпендикуляров* MC *и* mC.

Предположим, во-первых, что кривая линия AMD имеет осью прямую AB, к которой ординаты PM перпендикулярны. Представим себе другую ординату mp; она будет бесконечно близка к MP, так как точка m по предположению бесконечно близка к M. Проведем через точку пересечения C линию CE, параллельную оси AB и встречающую ординаты MP и mp в точках E и e. Проведя, наконец, MR параллельно AB, мы образуем подобные прямоугольные треугольники MRm и MEC, потому что угол EMC равен углу RMm, так как углы EMR и CMm прямые и угол CMR у них общий.



Черт. 67.

Обозначив данные AP через x, PM через y, а неизвестную ME через z, мы будем иметь, что Ee, или Pp, или $MR = dx$, $Rm = dy = dz$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$; тогда

$$MR(dx) \,.\, Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}) :: ME(z) \,.\, MC =$$

$$= \frac{z\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx}.$$

Далее, CM — радиус дуги Mm с центром в точке C, который обращается в Cm, когда EM увеличивается на диференциал Rm, — остается без изменения.

Значит, его диференциал равен нулю, что дает (dx предполагается постоянным):

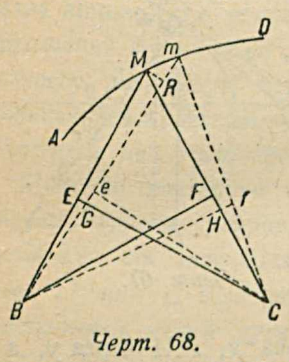
$$\frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2 + z\,dy\,ddy}{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}} = 0,$$

откуда

$$ME(z) = \frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2}{-dy\,ddy} = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy},$$

если подставить вместо dz его величину dy.

Предположим, во-вторых, что все ординаты BM, Bm (черт. 68) выходят из одной точки B. Опустив из искомой точки C на ординаты, которые я предполагаю бесконечно близкими, перпендикуляры CE и Ce и описав из центра B малую дугу MR, мы образуем подобные прямоугольные треугольники: RMm и EMC, BMR, BEG и CeG. Обозначая BM через y, ME через z, MR через dx, мы будем иметь, что $Rm = dy$, $Mm = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, CE или $Ce = \frac{z\,dy}{dx}$ и



Черт. 68.

$$MC = \frac{z\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}.$$

Затем мы найдем, как и в первом случае, что

$$z = \frac{dz\,dx^2 + dz\,dy^2}{-dy\,ddy}.$$

Итак,

$$BM(y) \,.\, Ce\left(\frac{z\,dy}{dx}\right) :: MR(dx) \,.\, Ge = \frac{z\,dy}{y}.$$

И

$$me - ME$$

или

$$Rm - Ge = dz = \frac{ydy - z\,dy}{y}.$$

Следовательно, подставляя эту величину вместо dz, мы будем иметь:

$$ME(z) = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2 - y\,ddy}.$$

Если предположить, что y бесконечно велик, то члены dx^2 и dy^2 будут ничто по сравнению с $yddy$, и следовательно, последняя формула обратится в формулу, выведенную для предыдущего случая. Это и должно случиться, потому что тогда ординаты становятся параллельными между собой и дуга MR обращается в прямую, перпендикулярную к ординатам.

Далее, поскольку природа кривой AMD известна, можно выразить величины dy^2 и ddy через dx^2, или dx^2 и ddy — через dy^2. Подстановка полученных значений в предыдущие формулы даст для ME вполне определенное значение, свободное от диференциалов. Если провести EC перпендикулярно ME, то она пересечет MC, перпендикуляр к кривой, в искомой точке C. Что и было предложено.

Следствие I.

78. Из подобия прямоугольных треугольников MRm и MEC (черт. 67, 68) будем иметь в первом случае:

$$MC = \frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{- dx\,ddy},$$

а во втором случае

$$MC = \frac{\overline{y\,dx^2 + y\,dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}\,^{87)}.$$

Замечание.

79. Существует еще ряд других способов нахождения радиусов развертки. Я приведу здесь часть из них, для того чтобы дать возможность различного подхода к вопросу тем, кто еще не овладел этим исчислением.

Первый случай: ординаты кривых перпендикулярны к оси.

Первый способ. Продолжим MR до G, где она встречается с перпендикуляром mC (черт. 67). Прямые углы MRm и MmG дадут, что

$$RG = \frac{dy^2}{dx};$$

следовательно,

$$MG = \frac{dx^2 + dy^2}{dx}.$$

А из подобия треугольников MRm и MPQ (точки Q и q суть пересечения бесконечно близких перпендикуляров MC и mC с осью AB) получается, что

$$MQ = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}, \quad PQ = \frac{y\,dy}{dx}.$$

Следовательно,

$$AQ = x + \frac{y\,dy}{dx},$$

диференциал чего (dx предполагается постоянным) дает:

$$Qq = dx + \frac{dy^2 + y\,ddy}{dx}.$$

Из подобия треугольников CMG и CQq получается

$$MG - Qq\left(\frac{-y\,ddy}{dx}\right) . MG\left(\frac{dx^2 + dy^2}{dx}\right) ::$$

$$:: MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{dx^2 + dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy}.$$

Второй способ. Если описать из центра C малую дугу QO, то малые прямоугольные треугольники QOq и MRm будут подобны, так как Mm и QO, MR и Qq параллельны между собой; следовательно,

$$Mm\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) . MR\,(dx) ::$$

$$:: Qq\left(\frac{dx^2 + dy^2 + y\,ddy}{dx}\right) . QO = \frac{dx^2 + dy^2 + y\,ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

А подобные секторы CMm и CQO дают:

$$Mm - QO\left(\frac{-y\,ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right) . Mm\,(\sqrt{dx^2 + dy^2}) ::$$

$$:: MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) . MC = \frac{dx^2 + dy^2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy}.$$

Третий способ. Проведя бесконечно близкие касательные MT и mt, получим:

$$PT - AP \text{ или } AT = \frac{y\,dx}{dy} - x,$$

диференциал чего дает:

$$Tt = -\frac{y\,dx\,ddy}{dy^2}.$$

Описав из центра m малую дугу TF, образуем прямоугольный треугольник FTt, подобный RmM, потому что углы FtT и RMm или PTM, которые отличаются друг от друга лишь на бесконечно малый угол Tmt, равны между собой; это дает:

$$Mm\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right).\ mR\,(dy)::$$

$$::Tt\left(-\frac{y\,dx\,ddy}{dy^2}\right).\ TF = \frac{-y\,dx\,ddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Но секторы TmF и MCm подобны, потому что угол $Tmt + MmC$ прямой и угол $MmC + MCm$ тоже прямой, так как треугольник CMm рассматривается как прямоугольный при M. Значит,

$$TF\left(-\frac{y\,dx\,ddy}{dy\sqrt{dx^2+dy^2}}\right).\ Mm\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right)::$$

$$::Tm \text{ или } TM\left(\frac{y\sqrt{dx^2+dy^2}}{dy}\right).\ MC = \frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}.$$

Четвертый способ. Находим (§ 64) вторые диференциалы, полагая dx постоянным. Подобные прямоугольные треугольники HmS и Hnk (черт. 69) дадут:

$$Hm \text{ или } Mm\left(\sqrt{dx^2+dy^2}\right).\ mS \text{ или } MR\,(dx)::$$

$$::Hn\,(-ddy)\,.\ nk = -\frac{dx\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

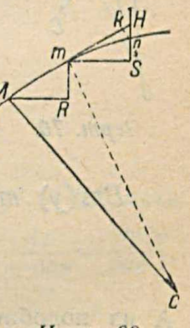
Но угол kmn равен углу, который образуют между собой касательные в точках M и m, стало быть он,

как уже доказано, равен углу MCm, откуда следует, что секторы nmk и MCm подобны и таким образом

$$nk\left(-\frac{dx\,ddy}{\sqrt{dx^2+dy^2}}\right).\,mk \text{ или } (\S\,2)\; Mm(\sqrt{dx^2+dy^2})::$$

$$::Mm(\sqrt{dx^2+dy^2}).\,MC=\frac{dx^2+dy^2\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}.$$

Вместо mk можно взять mH или Mm, потому что они отличаются только на малую прямую Hk, бесконечно меньшую, чем они сами; точно так же Hn бесконечно меньше, чем Rm или Sn.



Черт. 69.

Второй случай: ординаты кривых выходят из одной фиксированной точки.

Первый способ. Если опустить из фиксированной точки B (черт. 68) перпендикуляры BF и Bf на бесконечно близкие радиусы CM и Cm, то подобные прямоугольные треугольники mMR и BMF (они подобны, так как если прибавить к углам mMR или BMF один и тот же угол FMR, то получается прямой) дадут:

$$MF \text{ или } MH=\frac{y\,dx}{\sqrt{dx^2+dy^2}}$$

и

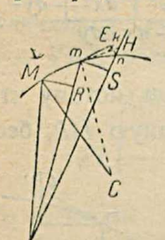
$$BF=\frac{y\,dy}{\sqrt{dx^2+dy^2}},$$

диференциал чего (dx предполагается постоянным) будет:

$$Bf - BF \text{ или } Hf = \frac{dx^2\,dy^2 + dy^4 + y\,dx^2\,ddy}{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

А из подобных секторов CMm и CHf получается пропорция:

$$Mm - Hf\,.\,Mm :: MH\,.\,MC,$$



Черт. 70.

и, следовательно,

$$MC = \frac{\overline{y\,dx^2 + y\,dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}.$$

Второй способ. Находим (§ 64) вторые диференциалы, полагая dx постоянным. Подобные секторы BmS и mEk (черт. 70) дадут, что

$$Bm(y)\,.\,mS(dx) :: mE\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right).\,Ek = \frac{dx\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}.$$

А из подобия прямоугольных треугольников HmS и Hnk будем иметь:

$$Hm \text{ или } Mm\left(\sqrt{dx^2 + dy^2}\right).\,mS \text{ или } MR(dx) :: Hn\,(-ddy)\,.\,nk = -\frac{dx\,ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Следовательно,

$$En = \frac{dx^3 + dx\,dy^2 - y\,dx\,ddy}{y\sqrt{dx^2 + dy^2}},$$

и если взять третью пропорциональную к En и Em

или Mm, то из подобных секторов Emn и MCm для MC получится та же величина, что и прежде.

Если обозначить $Mm\,(\sqrt{dx^2+dy^2})$ через du и вместо dx принять за постоянную dy, то в первом случае окажется

$$MC=\frac{du^3}{dy\,ddx},$$

а во втором

$$MC=\frac{y\,du^3}{dx\,du^2+y\,dy\,ddx}.$$

Наконец, если принять за постоянную du, то в первом случае получится:

$$MC=\frac{dx\,du}{-ddy}$$

или

$$\frac{dy\,du}{ddx}$$

(потому что диференциал от $dx^2+dy^2=du^2$ есть $dx\,ddx+dy\,ddy=0$, и, таким образом, $\frac{dx}{-ddy}=\frac{dy}{ddx}$), а во втором

$$MC=\frac{y\,dx\,du}{dx^2-y\,ddy}$$

или

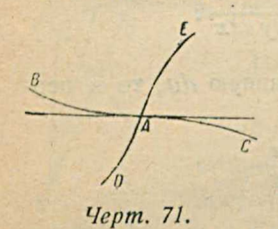
$$\frac{y\,dy\,du}{dx\,dy+y\,ddx}.$$

Следствие II.

80. Из того, что для ME или MC (черт. 72) получается единственное значение, следует, что кривая линия AMD может иметь только одну единственную развертку BCG.

Следствие III.

81. Если величина ME (черт. 67, 68) $\left(\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}\right)$ или $\left(\frac{y\,dx^2+y\,dy^2}{dx^2+dy^2-y\,ddy}\right)$ положительна, то точку E надо взять с той же стороны оси AB или точки B, с какой она предполагалась при выкладках, откуда видно, что в этом случае кривая будет обращена вогнутостью к этой оси или этой точке. Если же величина ME отрицательна, точку E надо будет взять с противоположной стороны, откуда видно, что при этом кривая окажется выпуклой. Таким образом в точке перегиба или возврата, отделяющей вогнутую часть от выпуклой, величина ME из положительной должна стать отрицательной, и следовательно, бесконечно близкие или смежные перпендикуляры из сходящихся станут расходящимися. А это может осуществляться только двумя способами. Действительно: либо они возрастают по мере приближения к точке перегиба или возврата, и тогда они должны стать параллельными, т. е. радиус развертки должен стать бесконечно большим; либо же они убывают, и тогда они необходимо должны совпасть, т. е. радиус развертки должен стать равным нулю. Все это совершенно согласуется с тем, что было доказано в предыдущей главе.

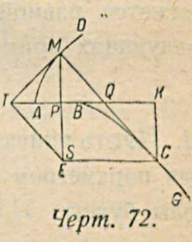


Черт. 71.

Замечание.

82. Так как до сих пор полагали, что в точке перегиба радиус развертки всегда бесконечно велик, то теперь своевременно показать, что существует, так сказать, бесчисленное множество таких видов кривых, которые все имеют в точке перегиба радиус развертки, равный нулю, и что этот радиус бесконечно велик лишь у одного вида кривых.

Пусть BAC (черт. 71) — одна из кривых, имеющих в точке перегиба A бесконечно большой радиус развертки. Если развернуть части BA и AC, начиная с точки A, то ясно, что образуется кривая линия DAE, имеющая точку перегиба в той же точке A, но ее радиус развертки в этой точке будет равен нулю. Если таким же образом образовать третью кривую посредством развертывания второй кривой DAE, затем — четвертую посредством развертывания третьей и так далее до бесконечности, то станет ясным, что в точке перегиба A всех этих кривых радиусы разверток будут всегда равны нулю. Следовательно и т. д. [88]).



Черт. 72.

Предложение II.

Задача.

83. Найти *для кривых* AMD (черт. 72), *ось которых* AB *образует с касательной в* A *прямой угол, точку* B, *в которой эта ось касается развертки* BCG.

Если предположить, что точка M становится бесконечно близкой к вершине A, то ясно, что перпендикуляр MQ пересечет ось в искомой точке B. Отсюда следует, что если найти выражение $PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)$ через x или y и затем приравнять x или y нулю, то точка P окажется совпадающей с точкой A, а точка Q — с искомой точкой B, т. е. PQ окажется равной искомой AB. Это разъясняется на следующих примерах.

Пример I.

84. Пусть кривая AMD (черт. 72) — парабола, имеющая параметром данную прямую a. Уравнение параболы будет:

$$ax = yy,$$

диференциал чего дает:

$$dy = \frac{a\,dx}{2y} = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}}.$$

Диференцируя последнее уравнение, полагая dx постоянным, найдем:

$$ddy = \frac{-a\,dx^2}{4x\sqrt{ax}}.$$

Подставив наконец эти значения вместо dy и ddy в формулу $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, будем иметь (§ 77):

$$ME = \frac{\overline{a+4x}\sqrt{ax}}{a} = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}.$$

Это дает следующее построение.

Пусть через точку T, в которой касательная MT встречается с осью, проведена линия TE, параллельная MC; я утверждаю, что она пересекает продолжение MP в искомой точке E. Действительно, прямые углы MPT и MTE дают, что

$$MP(\sqrt{ax}) \,.\, PT(2x) :: PT(2x) \,.\, PE = \frac{4xx}{\sqrt{ax}} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a},$$

и, следовательно,

$$MP + PE = \sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}.$$

Кроме того из прямоугольных треугольников MPQ и MEC будем иметь:

$$PM(\sqrt{ax}) \,.\, PQ\left(\frac{1}{2}a\right) ::$$

$$:: ME\left(\sqrt{ax} + \frac{4x\sqrt{ax}}{a}\right) . EC \text{ или } PK = \frac{1}{2}a + 2x.$$

Следовательно, $QK = 2x$. Это дает еще такое построение.

Возьмем QK равной удвоенной AP или (что сводится к тому же) возьмем PK равной TQ и проведем KC параллельно PM. Она [KC] пересечет перпендикуляр MC в точке C, принадлежащей развертке BCG.

Другой способ. $yy = ax$, $2y\,dy = a\,dx$, а диференциал этого (dx предполагается постоянным) дает:

$$2dy^2 + 2y\,ddy = 0,$$

откуда

$$-ddy = \frac{dy^2}{y}.$$

Подставив это значение в формулу $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, найдем (§ 77):

$$ME = \frac{y\,dy^2 + y\,dx^2}{dy^2}.$$

Следовательно,

$$EC \text{ или } PK = \frac{y\,dy^2 + y\,dx^2}{dy\,dx} = \frac{y\,dy}{dx} + \frac{y\,dx}{dy} =$$
$$= PQ + PT \text{ или } TQ.$$

Это дает те же построения, что и прежде. Действительно,

$$MP.PT :: dy.dx :: PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right).PE =$$
$$= \frac{y\,dx^2}{dy^2} = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}.$$

Теперь для нахождения точки B, в которой ось AB касается развертки BCG, мы имеем $PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) = \frac{1}{2}a$. Так как это величина постоянная, то она остается без изменения, где бы ни находилась точка M. Поэтому, когда она попадает в вершину A, то получается еще, что PQ, которое в этом случае обращается в AB, равно $\frac{1}{2}a$.

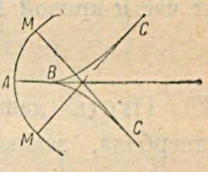
Чтобы определить природу развертки BCG по способу Декарта, обозначим абсциссу BK через u, а ординату KC или PE через t. Тогда

$$CK(t) = \frac{4x\sqrt{ax}}{a} \quad \text{и} \quad AP + PK - AB(u) = 3x.$$

Подставляя в уравнение $t = \frac{4x\sqrt{ax}}{a}$ вместо x его значение $\frac{1}{3}u$, получим новое уравнение:

$$27att = 16u^3,$$

выражающее отношение между BK и KC. Отсюда видно, что развертка обыкновенной параболы BCG есть вторая кубическая парабола с параметром, равным $^{27}/_{16}$ параметра данной параболы.



Черт. 73.

Очевидно, что CBC (черт. 73), развертка всей обыкновенной параболы MAM, состоит из двух частей CB и BC, обращенных вдруг к другу выпуклостями так, что они образуют B точку возврата [89]).

Предупреждение.

Под геометрическими кривыми AMD, BCG (черт. 72) *подразумеваются такие, в которых отношение между обсциссами* AP, BK *и ординатами* PM, KC *может быть выражено уравнением, не содержащим диференциалов; геометрическим считается и все то, что можно получить при помощи этих линий. Здесь предполагается что абсциссы и ординаты — прямые линии* [90]).

Следствие.

85. Когда данная кривая AMD — геометрическая, то ясно, что всегда можно найти (как в этом примере) уравнение, выражающее природу ее разверт-

ки BCG; таким образом эта развертка будет также геометрической. Но кроме того я еще утверждаю, что она окажется спрямляемой, т. е. что можно геометрическим путем найти прямолинейные отрезки, равные любой ее части BC. Действительно, очевидно (*§ 75*), что при помощи геометрической линии AMD можно определить на CM, касательной к части BC, такую точку M, что отрезок CM будет отличаться от части кривой BC только на данную прямую AB [91]).

Пример II.

86. Пусть данная кривая MDM (черт. 74) — гипербола, заключенная между своими асимптотами; уравнение ее $aa = xy$.

Получается:

$$\frac{aa}{y} = x, \quad \frac{-aa\,dy}{yy} = dx,$$

и, если положить dx постоянным (*§ 1*),

$$\frac{-aa\,yy\,ddy + 2aay\,dy^2}{y^4} = 0,$$

откуда

$$ddy = \frac{2dy^2}{y}.$$

При подстановке этой величины в $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$ получится (*§ 77*), что

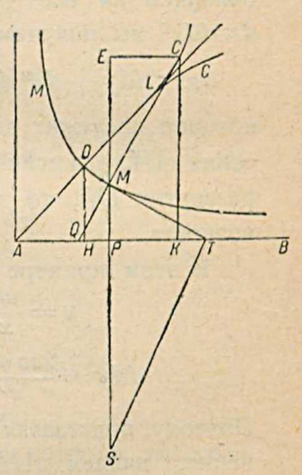
$$ME = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{-2dy^2},$$

и таким образом

$$EC \text{ или } PK = -\frac{y\,dy}{2dx} - \frac{y\,dx}{2dy}.$$

Это дает следующие построения.

Проведем через точку T, где касательная MT встречается с асимптотой AB, линию TS, параллельную MC и встречающую продолжение MP в S. Возьмем ME, равную половине MS, с другой стороны от асимптоты (которая здесь рассматривается как ось), так как ее величина отрицательна, или же возьмем PK, равную половине TQ, с той же стороны, что и точка T. Я утверждаю, что если провести EC параллельно оси или KC перпендикулярно ей, то они пересекут прямую MC в искомой точке C. Действительно ясно, что



Черт. 74.

$$MS = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dy^2}$$

и что

$$TQ = \frac{y\,dy}{dx} + \frac{y\,dx}{dy}.$$

Если обратить внимание на форму гиперболы MDM, то видно, что ее развертка CLC должна иметь точку возврата L, так же как и развертка параболы. Для ее определения я замечаю, что радиус развертки DL меньше всякого другого радиуса MC, откуда следует, что диференциал его выражения (§ 78)

$$\frac{\overline{dx^2+dy^2}\sqrt{\overline{dx^2+dy^2}}}{-dx\,ddy}, \quad \text{или} \quad \frac{\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy},$$

будет равен (гл. *III*) нулю или бесконечности. Это дает, если полагать попрежнему dx постоянным:

$$\frac{-3dx\,dy\,ddy^2\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}+dx\,dddy\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,ddy^2}=0 \text{ или } \infty.$$

Делением на $\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}}$ и затем умножением на $dx\,ddy^2$ мы получим уравнение:

$$dx^2\,dddy+dy^2\,dddy-3dy\,ddy^2=0 \text{ или } \infty,$$

которое послужит для нахождения для x такого значения AH, что если провести ординату HD и радиус развертки DL, то точка L будет искомой точкой возврата.

В этом примере

$$y=\frac{aa}{x},\quad dy=\frac{-aa\,dx}{xx},$$

$$ddy=\frac{2aa\,dx^2}{x^3},\quad dddy=\frac{-6aa\,dx^3}{x^4}.$$

Поэтому, подставляя эти значения в предыдущее уравнение, найдем $AH\,(x)=a$. Откуда следует, что точка D есть вершина гиперболы, а линии AD и DL образуют одну прямую AL, являющуюся ее осью.

Пример III.

87. Общее уравнение $y^m=x$ (черт. 72, 74) выражает природу всего бесконечного множества парабол, если показатель степени m есть целое или дробное положительное число, и всего бесконечного множества гипербол, если он есть отрицательное число.

Мы получаем здесь:

$$my^{m-1}\,dy = dx,$$

диференциал чего, если полагать dx постоянным, дает:

$$\overline{mm - m}\,y^{m-2}\,dy^2 + my^{m-1}\,ddy = 0.$$

Деля на my^{m-1}, находим:

$$-ddy = \frac{\overline{m-1}\,dy^2}{y},$$

откуда, подставляя это значение в $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, получаем (§ 77):

$$ME = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{\overline{m-1}\,dy^2}.$$

Следовательно,

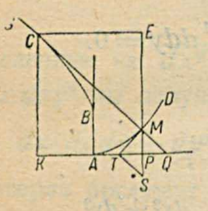
$$EC \text{ или } PK = \frac{y\,dy}{\overline{m-1}\,dx} + \frac{y\,dx}{\overline{m-1}\,dy}.$$

Это дает такие общие построения.

Проведем через точку T, в которой касательная MT пересекает ось AP, линию TS, параллельную MC и встречающую продолжение MP в точке S. Возьмем $ME = \frac{1}{m-1}MS$ или же $PK = \frac{1}{m-1}TQ$. Ясно, что если провести через точку E линию, параллельную оси, или через точку K линию, перпендикулярную к ней, то они пересекут MC в искомой точке C.

Если m отрицательно, как это бывает у гипербол, то величина ME (черт. 74) будет отрицатель-

ной, и следовательно, гиперболы будут обращены выпуклостью к своей оси, которая при этом обращается в асимптоту. У парабол же, где m положительно, могут представиться два случая. Если m (черт. 75) меньше единицы, то они обращены выпуклостью к своей оси, которая обращается в касательную в вершине. Если же m (черт. 72) больше единицы, то они обращены вогнутостью к своей оси, которая обращается в перпендикуляр в вершине.

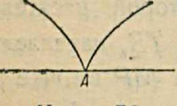


Черт. 75.

Для нахождения в последнем случае точки B, в которой ось AB касается развертки, мы имеем:

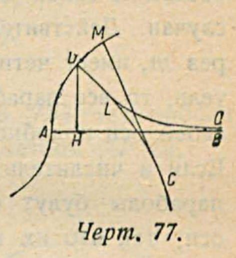
$$PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right)=\frac{y^{2-m}}{m},$$

что дает три различных случая. Действительно, если $m=2$, что бывает только у обыкновенной параболы, то показатель степени при y становится нулем и эта неизвестная исчезает, а следовательно, $AB=\frac{1}{2}$, т. е. половине параметра. Если m меньше 2, то показатель степени при y положителен и y окажется в числителе, что обращает (при приравнивании (§ 83) его нулю) дробь в нуль, и значит в этом случае точка B совпадает с точкой A, как во второй кубической параболе $axx=y^3$. Если же, наконец, m (че 76) больше 2, то показатель степени при y



Черт. 76.

отрицателен и y окажется в знаменателе и (когда он станет нулем) дробь обратится в бесконечность, и значит в этом случае точка B будет бесконечно удалена от точки A, или (что то же самое) ось AB будет асимптотой развертки как в первой, кубической параболе $aax = y^3$. Можно заметить, что в последнем случае развертка CLO (черт. 77) половины параболы ADM имеет точку возврата L; таким образом при развертывании части LO до бесконечности точка D опишет только конечную (déterminée) часть DA, в то время как при развертывании другой части LC, также продолженном до бесконечности, она опишет бесконечную часть DM.



Черт. 77.

Точка L определяется так же, как и для гиперболы.

Пусть, например, $aax = y^3$, или $y = x^{\frac{1}{3}}$; тогда

$$dy = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} dx, \quad ddy = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} dx^2,$$

$$dddy = \frac{10}{27} x^{-\frac{8}{3}} dx^3.$$

Подставив эти значения в уравнение $dx^2 dddy + dy^2 dddy - 3dy\, ddy^2 = 0$, найдем (§ 86) $AH\,(x) = \sqrt[4]{\frac{1}{91\,125}}$. Аналогично обстоит дело и в других случаях.

Замечание.

88. При предположении, что m больше единицы, причем параболы оказываются обращенными вогнутостью к своей оси, могут иметь место различные случаи. Действительно, если дробь, обозначенная через m, имеет четный числитель и нечетный знаменатель, то все параболы расположатся по обе стороны своей оси подобно обыкновенной параболе (черт. 73). Если и числитель и знаменатель — оба нечетные, то параболы будут опрокинуты по обе стороны своей оси, так что их вершина A (черт. 77) будет точкой перегиба, как в первой кубической параболе $x = y^{\frac{3}{1}}$, или $aax = y^3$. Наконец, если при нечетном числителе знаменатель четный, то параболы будут опрокинуты по одну сторону своей оси, так что их вершина A (черт. 76) будет точкой возврата, как во второй кубической параболе $x = y^{\frac{3}{2}}$, или $axx = y^3$. Все это следует из того, что четная степень не может иметь отрицательного значения. Теперь очевидно, что:

1° В точке перегиба A (черт. 77) радиус развертки может быть бесконечно большим, как в случае $aax = y^3$, или бесконечно малым, как в случае $aax^3 = y^5$.

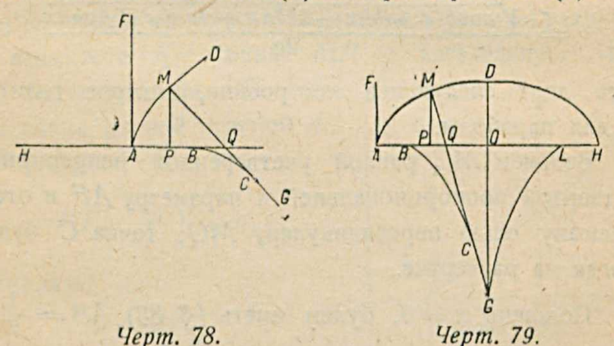
2° В точке возврата A (черт. 76) радиус развертки может быть или бесконечностью, как в случае $a^3xx = y^5$, или нулем, как в случае $axx = y^3$

3° Из того, что радиус развертки равен бесконечности или нулю, не следует (черт. 73), что кривая

при этом имеет точку перегиба или возврата. Действительно, в случае $a^3x = y^4$ он равен бесконечности, в случае $ax^3 = y^4$ он равен нулю, и, однако, обе эти параболы располагаются по обе стороны своей оси подобно обыкновенной параболе [92]).

Пример IV.

89. Пусть кривая *AMD* (черт. 78, 79) — гипербола или эллипс с осью *AH* (*a*) и параметром *AF* (*b*).



Черт. 78. *Черт. 79.*

По свойству этих линий будем иметь:

$$y = \sqrt{\frac{abx \mp bxx}{a}},$$

$$dy = \frac{ab\,dx \mp 2bx\,dx}{2\sqrt{aabx \mp abxx}}$$

и

$$ddy = \frac{-a^3bb\,dx^2}{\overline{4aabx \mp 4abxx}\sqrt{aabx \mp abxx}}.$$

Если подставить эти значения в общее выражение *MC* (§ *78*)

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy},$$

то для этих двух кривых окажется, что

$$MC = \frac{\overline{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a^3bb} \times$$

$$\times \sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx} = \frac{4\overline{MQ}^3}{bb},$$

так как в том и другом случае

$$MQ\left(\frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dx}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{aabb \mp 4abbx + 4bbxx + 4aabx \mp 4abxx}}{2a}.$$

Это дает следующее построение, которое годится и для параболы.

Возьмем MC равной учетверенной непрерывной четвертой пропорциональной к параметру AF и отсекаемому осью перпендикуляру MQ; точка C будет тогда на развертке.

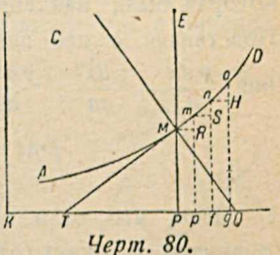
Положив $x = 0$, будем иметь (§ 83) $AB = \frac{1}{2}b$. И если мы положим в эллипсе $x = \frac{1}{2}a$, то найдем DG (черт. 79) $= \frac{a\sqrt{ab}}{2b}$, т. е. равным половине параметра малой оси. Отсюда видно, что для эллипса развертка BCG заканчивается в точке G на малой оси DO, в которой она образует точку возврата, в то время как для параболы и гиперболы развертка простирается до бесконечности [83]).

Если в эллипсе $a = b$, то $MC = \frac{1}{2}a$, откуда следует, что все радиусы развертки равны между

собой и что стало быть она будет лишь точкой; эллипс в этом случае обращается в круг, разверткой которого является его центр. Это, как известно, соответствует истине.

Пример V.

90. Пусть AMD (черт. 80) — обыкновенная логарифмическая кривая, природа которой такова, что если через любую ее точку M провести перпендикулярную к асимптоте KP линию MP и касательную MT, то подкасательная PT всегда равна данной прямой a.



Черт. 80.

Итак,

$$PT\left(\frac{y\,dx}{dy}\right)=a,$$

откуда

$$dy=\frac{y\,dx}{a},$$

диференциал чего, если полагать dx постоянным, дает:

$$ddy=\frac{dy\,dx}{a}=\frac{y\,dx^2}{aa}.$$

Подставляя эти значения в $\frac{dx^2+dy^2}{-ddy}$, найдем (§ 77):

$$ME=\frac{-aa-yy}{y}.$$

Следовательно,

$$EC \text{ или } PK=\frac{-aa-yy}{a}\ ^{94}).$$

Это дает следующее построение.

Отложим PK, равное TQ, в сторону точки T, потому что оно отрицательно, и проведем KC параллельно PM. Я утверждаю, что KC пересечет перпендикуляр MC в искомой точке C. Действительно,

$$TQ = \frac{aa + yy}{a}.$$

Если угодно, чтобы точка M была точкой наибольшей кривизны, то надо воспользоваться формулой:

$$dx^2\, dddy + dy^2\, dddy - 3dy\, ddy^2 = 0,$$

которая была найдена (§ 86) во втором примере. Подставляя в нее вместо dy, ddy, $dddy$ их значения $\frac{y\,dx}{a}$, $\frac{y\,dx^2}{aa}$, $\frac{y\,dx^3}{a^3}$, найдем:

$$PM\,(y) = a\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Ясно, что если принять dx за постоянную, то ординаты y будут относиться между собой, как их диференциалы dy или $\frac{y\,dx}{a}$, откуда следует, что они образуют геометрическую прогрессию. Действительно, если представить себе, что асимптота, или ось PK, разделена на бесконечное число равных малых частей, Pp или MR, pf или mS, fg или nH и т. д., заключенных между ординатами PM, pm, fn, go и т. д., то получится:

$$PM \,.\, pm :: Rm \,.\, Sn ::$$

$$:: PM + Rm \text{ или } pm \,.\, pm + Sn \text{ или } fn.$$

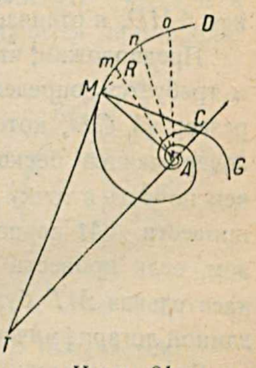
Так же доказывается, что

$$pm . fn :: fn . go$$

и т. д. Стало быть ординаты PM, pm, fn, go и т. д образуют геометрическую прогрессию.

Пример VI.

91. Пусть кривая AMD (черт. 81) — логарифмическая спираль, природа которой такова, что если какую-либо ее точку M соединить прямой MA с фиксированной точкой A, ее центром, и провести касательную MT, то угол AMT всюду остается неизменным.



Черт. 81.

При постоянном угле AMT или AmM отношение mR (dy) к RM (dx) будет тоже постоянным. Поэтому диференциал $\frac{dy}{dx}$ должен быть нулем, что дает (если dx предположить постоянным) $ddy = 0$. Если на основании этого в общем выражении ME для случая, когда все ординаты выходят из одной точки, т. е. в

$$\frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 + dy^2 - y\,ddy},$$

отбросить член $yddy$, то получится:

$$ME = y,$$

т. е.

$$ME = AM.$$

Это дает следующее построение.

Проведем AC перпендикулярно AM до пересечения в C с прямой MC, перпендикулярной к кривой; точка C будет тогда на развертке ACG.

Углы AMT и ACM равны, потому что каждый из них при сложении с одним и тем же углом AMC дает прямой угол. Значит развертка ACG является такой же логарифмической спиралью, как и данная AMD, и отличается от нее только расположением.

Предположим, что дана точка C на развертке ACG, и требуется определить в этой точке длину радиуса развертки CM, который (§ 75) равняется части AC, совершающей бесконечное число оборотов, прежде чем попасть в точку A. Ясно, что для этого достаточно провести AM перпендикулярно к AC. Таким образом, если провести AT перпендикулярно к AM, то касательная MT будет тоже равняться AM — отрезку данной логарифмической спирали AMD.

Если представить себе бесконечное число ординат AM, Am, An, Ao и т. д., образующих между собой бесконечно малые и равные углы, то ясно, что треугольники MAm, mAn, nAo и т. д. будут подобны, потому что углы при A равны и по свойству логарифмической спирали углы при m, n, o, и т. д. тоже равны. Следовательно, $AM \,.\, Am :: Am \,.\, An$

и $Am \,.\, An :: An \,.\, Ao$ и т. д. Отсюда видно, что когда углы между ординатами AM, Am, An, Ao и т. д. равны, то эти ординаты образуют геометрическую прогрессию [95]).

Пример VII.

92. Пусть кривая AMD (черт. 82) — одна из бесконечного множества спиралей, которые можно построить в секторе BAD и которые обладают тем свойством, что если провести произвольный радиус AMP и обозначить всю дугу BPD через b, ее часть BP через z, радиус AB или AP через a и его часть AM через y, то получится пропорция:

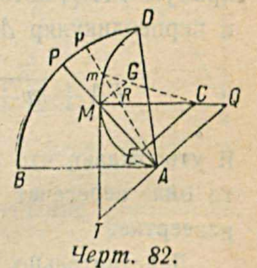
$$b \,.\, z :: a^m \,.\, y^m.$$

Уравнение спирали AMD есть

$$y^m = \frac{a^m z}{b};$$

диференциал чего дает:

$$my^{m-1}\, dy = \frac{a^m\, dz}{b}.$$



Черт. 82.

Из подобия секторов AMR и APp получается:

$$AM\,(y) \,.\, AP\,(a) :: MR\,(dx) \,.\, Pp\,(dz) = \frac{a\, dx}{y}.$$

При подстановке этого значения вместо dz в только что найденное уравнение получится:

$$my^m\, dy = \frac{a^{m+1}\, dx}{b},$$

диференциал чего (dx предполагается постоянным) есть

$$mmy^{m-1}dy^2 + my^m\, ddy = 0.$$

При делении на my^{m-1} отсюда получается:

$$-y\, ddy = m\, dy^2,$$

и, следовательно,

$$ME\ (\S\ 77)\ \left(\frac{y\, dx^2 + y\, dy^2}{dx^2 + dy^2 - y\, ddy}\right) = \frac{y\, dx^2 + y\, dy^2}{dx^2 + \overline{m+1}dy^2},$$

что дает следующее построение.

Проведем через центр A перпендикулярно к AM прямую TAQ, которая пересечет касательную MT в T и перпендикуляр MQ в Q, и пусть

$$TA + \overline{m+1}\, AQ\, .\, TQ :: MA\, .\, ME$$ [96]).

Я утверждаю, что если провести EC параллельно TQ, то она пересечет MQ в точке C, принадлежащей развертке.

Действительно, из параллельности MKG и TAQ вытекает, что

$$MR(dx) + \overline{m+1}\, RG\left(\frac{dy^2}{dx}\right).\, MG\left(dx + \frac{dy^2}{dx}\right) ::$$

$$:: TA + \overline{m+1}\, AQ\, .\, TQ ::$$

$$:: AM(y)\, .\, ME = \frac{y\, dx^2 + y\, dy^2}{dx^2 + \overline{m+1}\, dy^2}$$ [97]).

Пример VIII.

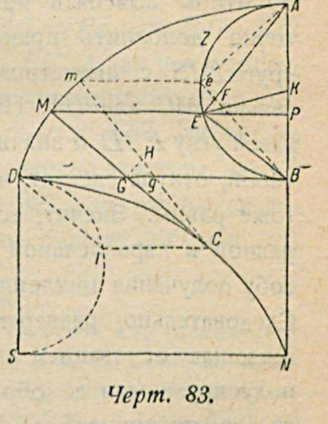
93. Пусть AMD (черт. 83), — обыкновенная полуциклоида, основание которой BD равно полуокружности образующего круга BEA.

Обозначив AP через x, PM через y, дугу AE через u и диаметр AB через $2a$, мы будем по свойству круга иметь, что

$$PE = \sqrt{2ax - xx},$$

а по свойству циклоиды, что

$$y = u + \sqrt{2ax - xx}.$$



Черт. 83.

Диференциал последнего дает:

$$dy = du + \frac{a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax - xx}} =$$

$$= \frac{2a\,dx - x\,dx}{\sqrt{2ax - xx}} \text{ или } dx\sqrt{\frac{2a - x}{x}},$$

если подставить вместо du его значение $\frac{a\,dx}{\sqrt{2ax - xx}}$. Если полагать dx постоянным, то

$$ddy = \frac{-a\,dx^2}{x\sqrt{2ax - xx}}.$$

Подставляя эти значения в $\frac{\overline{dx^2 + dy^2}\sqrt{dx^2 + dy^2}}{-dx\,ddy}$, получим (*§ 78*):

$$MC = 2\sqrt{4aa - 2ax},$$

т. е. $2BE$ или $2MG$ [98]).

Если положить $x = 0$, то для радиуса развертки в вершине A мы получим $AN = 4a$. Если же положить $x = 2a$, то окажется, что радиус развертки в точке D оказывается ничем или нулем, откуда видно, что развертка начинается в точке D, а кончается в N, так что $BN = BA$.

Чтобы выяснить природу этой развертки, достаточно дополнить прямоугольник BS, описать полукруг DIS с диаметром DS и провести DI параллельно MC или BE. После этого ясно, что угол BDI равен углу EBD и значит дуги DI и BE равны между собой, откуда следует, что их хорды DI и BE или GC тоже равны. Значит, если провести IC, то IC будет равной и параллельной DG, которая согласно способу получения циклоиды равняется дуге BE или DI. Следовательно, развертка DCN есть полуциклоида, имеющая основанием прямую NS, равную DIS — полуокружности ее образующего круга, т. е. это — та же полуциклоида $AMDB$, только перевернутая.

Следствие.

94. Ясно (*§ 75*), что отрезок циклоиды DC вдвое больше ее касательной CG или соответствующей хорды DI, а полуциклоида DCN вдвое больше диаметра своего образующего круга BN или DS.

Другое решение.

95. Длину радиуса MC можно найти также без всяких выкладок, именно следующим образом.

Представив себе другой перпендикуляр mC, бесконечно близкий к первому, другую параллельную me, другую хорду Be и описав из центров C и B малые дуги GH и EF, образуем прямоугольные треугольники GHg и EFe, которые будут конгруэнтны. Действительно, $Gg = Ee$, потому что BG или ME равняется дуге AE, а также Bg или me равняется дуге Ae; кроме того Hg или $mg - MG = Fe$ или $Be - BE$; и значит GH будет равняться EF. А так как перпендикуляры MC и mC параллельны хордам EB и eB, то угол MCm будет равняться углу EBe. Значит из того, что дуги GH и EF, измеряющие эти углы, равны, следует, что и радиусы CG и BE тоже равны; следовательно, MC надо взять вдвое больше MG или BE.

Лемма.

96. Если *имеется некоторое конечное или бесконечное множество величин* a, b, c, d, e *и т. д., которые представляют собою линии или поверхности или тела, то сумма всех их разностей* a — b + b — c + c — d + d — e *и т. д. равняется наибольшей из них* a *минус наименьшая из них* e *или просто наибольшей из них, когда наименьшая равна нулю.*

Это очевидно [99]).

Следствие I.

97. Из подобия секторов CMm и CGH ясно, что Mm — вдвое больше GH или равной ей EF; а так как это имеет место, где бы ни предполагать точку M, то сумма всех малых дуг Mm, т. е. часть Am полуциклоиды AMD, вдвое больше суммы всех малых

дуг EF. А так как малую прямую eF, перпендикулярную к Ae, можно рассматривать как малую дугу, описанную из центра A, то малая дуга EF, составляющая часть хорды AE, перпендикулярной к BE, есть разность хорд AE и Ae, и, следовательно, сумма всех малых дуг EF в дуге AZE будет равна сумме разностей всех хорд AE, Ae и т. д. в той же дуге, т. е. согласно лемме она будет равна хорде AE. Поэтому очевидно, что часть AM полуциклоиды AMD вдвое больше соответствующей хорды AE.

Следствие II.

98. Пространство $MGgm$ (*§ 2*), или трапеция $MGHm = \overline{\frac{1}{2}\,Mm + \frac{1}{2}\,GH} \times MG = \frac{3}{2}EF \times BE$, т. е. оно равняется утроенному треугольнику EBF или EBe. Отсюда следует, что пространство $MGBA$, сумма всех этих трапеций, втрое больше части круга $BEZA$ — суммы всех этих треугольников.

Следствие III.

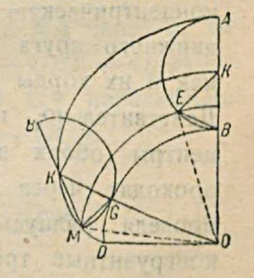
99. Обозначив BP через z, дугу AZE или EM или BG через u и радиус KA через a, получим, что параллелограм $MGBE = uz$. Но площадь циклоиды $MGBA = 3BEZA = 3EKB + \frac{3}{2}au$; следовательно, пространство $AMEB$, заключенное между частью циклоиды AM, параллелью ME, хордой BE и диаметром AB, будет равно $3EKB + \frac{3}{2}au - uz$. Отсюда

следует, что если взять $BP(z)=\frac{3}{2}a$, то пространство $AMEB$ будет втрое больше соответствующего треугольника EKB, и, следовательно, его квадратура не зависит от квадратуры круга. Это впервые отметил г. Гюйгенс. Вот еще другого рода пространство, обладающее тем же свойством.

Если от пространства $AMEB$ отнять сегмент $BEZA$, то остается пространство $AZEM=2EKB+$ $+au-uz$, откуда видно, что когда точка P попадает в центр K, то пространство $AZEM$ равняется квадрату радиуса. Очевидно из всех пространств $AMEB$ и $AZEM$ только эти два найденных пространства обладают квадратурой, не зависимой от квадратуры круга [100]).

Пример IX.

100. Пусть полуэпициклоида [101]) AMD (черт. 84) получена качением полукруга AEB по другому неподвижному кругу BGD; требуется определить на данном по положению перпендикуляре MG точку его прикосновения к развертке.



Черт. 8l.

Чтобы воспользоваться общими формулами, надо было бы взять в качестве ординат кривой AMD прямые линии, перпендикулярные к оси OA, и затем найти уравнение, выражающее связь абсцисс с ординатами или их диференциалов. Но так как подобное вычисление

было бы очень трудным, то в таких случаях лучше пытаться найти решение, исходя из самого способа образования кривой.

Когда полукруг *AEB* приходит в положение *MGB*, при котором он касается в *G* основания *BD*, и образующая точка *A* попадает в точку *M* полуэпициклоиды *AMD*, то ясно, что:

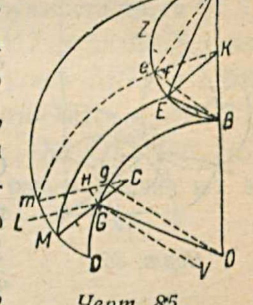
1° Дуга *GM* равна дуге *GD*; а также дуга *GB* подвижного круга равна дуге *GB* неподвижного.

2° *MG* (§ 43) перпендикулярна к кривой, так как если рассматривать полуокружность *MGB* или *AEB* и основание *BGD* как совокупности бесконечного числа соответственно равных малых прямых, то очевидно, что полуэпициклоида *AMD* будет совокупностью бесконечного числа малых дуг, имеющих центрами последовательно все точки касания *G* и описанных одной и той же точкой *M* или *A*.

3° Если описать из центра *O* неподвижного круга концентрическую дугу *ME*, то дуги *MG* и *EB* подвижного круга будут равны между собой так же, как и их хорды *MG* и *EB* и углы *OGM* и *OBE*. Действительно, прямые *OK* и *OK*, соединяющие центры обоих этих кругов, равны, так как они проходят через точки касания *B* и *G*; поэтому, проведя радиусы *OM*, *OE*, *KE*, мы образуем конгруэнтные треугольники *OKM* и *OKE*. И так как угол *OKM* равен углу *OKE*, то измеряющие эти углы дуги *MG* и *BE* одинаковых полукругов *MGB* и *BEA* будут равны так же, как и их

хорды MG и EB, откуда следует, что и углы OGM и OBE тоже будут равны.

Представим себе теперь другой перпендикуляр mC (черт. 85), бесконечно близкий к первому, другую концентрическую дугу me и другую хорду Be; пусть из центров C и B описаны малые дуги GH и EF. Прямоугольные треугольники GHg и EFe конгруэнтны, потому что Gg или $Dg - DG = Ee$ или дуге Be — дуга BE, а Hg или $mg - MG = Fe$ или $Be - BE$. Значит, малая дуга GH будет равна малой дуге EF, откуда следует, что угол GCH относится к углу EBF, как BE к CG. Таким образом вся трудность сводится к отысканию отношения этих углов. Это делается следующим образом.



Черт. 85.

Если провести радиусы OG, Og, KE, Ke и обозначить OG или OB через b, KE или KB или KA через a, то ясно, что угол $EBe = OBe - OBE = Ogm - OGM =$ (если провести GL и GV параллельно Cm и Og) $LGM - OGV = GCH - GOg$.

Стало быть

$$\text{угол } GCH = GOg + EBF.$$

При равенстве дуг Gg и Ee мы будем иметь:

$$GOg\,.\,EKe \text{ или } 2EBF :: KE\,(a)\,.\,OG\,(b);$$

следовательно,

$$\text{угол } GOg = \frac{2a}{b} EBF$$

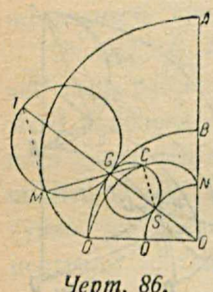
и

$$GCH = \frac{2a+b}{b} EBF.$$

Значит,

$$GCH \,.\, EBF \text{ или } BE \,.\, CG :: \frac{2a+b}{b} \,.\, 1,$$

и, следовательно, неизвестная



Черт. 86.

$$CG = \frac{b}{2a+b} BE \text{ или } MG.$$

Это дает следующее построение.

Если взять (черт. 86)

$$OA\,(2a+b) \,.\, OB\,(b) :: MG \,.\, GC,$$

то точка C будет на развертке. Ясно, что: 1° Эта развертка начинается в точке D и касается в ней основания BGD, потому что в этой точке дуга GM становится бесконечно малой. 2° Она кончается в точке N, так что

$$OA \,.\, OB :: AB \,.\, BN ::$$

$$:: OA - AB \text{ или } OB \,.\, OB - BN \text{ или } ON,$$

т. е. OA, OB и ON образуют непрерывную пропорцию. 3° Если теперь описать из центра O круг NSQ, то я утверждаю, что развертка DCN образуется качением подвижного круга GCS с диаметром GS или BN по неподвижному кругу NSQ, т. е. она будет

полуэпициклоидой, подобной данной или того же рода (потому что диаметры AB и BN подвижных кругов относятся между собой, как радиусы OB и ON неподвижных кругов), но опрокинутой так, что ее вершина придется в D. Для доказательства предположим, что диаметры подвижных кругов находятся на произвольной прямой OT, проведенной из центра O; она пройдет через точки касания S и G; и, если AB или $TG . BN$ или $GS :: MG . GC$, точка C будет на развертке и кроме того на окружности круга GCS, потому что при прямом угле GMT угол GCS тоже будет прямым. А из равенства углов MGT и CGS следует, что дуга TM или GB относится к дуге CS, как диаметр GT к диаметру $GS :: OG . OS :: GB . NS$, и, следовательно, дуги CS и SN равны. Значит, и т. д.

Следствие I.

101. Ясно (*§ 75*), что отрезок эпициклоиды DC равен прямой CM; следовательно, DC относится к его касательной $CG :: AB + BN . BN :: OB + ON . ON$, т. е. как сумма диаметров обоих образующих кругов, или подвижного и неподвижного круга, к радиусу неподвижного круга. Эту же истину можно еще открыть следующим способом: из подобия треугольников CMm и CGH (черт. 85) будем иметь:

$$Mm . GH \text{ или } EF :: MC . GC ::$$

$$:: OA + OB\ (2a + 2b) . OB\ (b).$$

Отсюда следует (как в *§ 97*), что часть эпициклоиды AM относится к соответствующей хорде AE, как сумма диаметров образующего круга и основания относится к радиусу основания [102]).

Следствие II.

102. Трапеция $MGHm = \overline{\frac{1}{2}GH + \frac{1}{2}Mm \times MG}$ (черт. 85). Далее,

$$CG\left(\frac{b}{2a+b}MG\right).CM\left(\frac{2a+2b}{2a+b}MG\right) :: GH.Mm = \frac{2a+2b}{b}GH.$$

А так как $GH = EF$ и $MG = EB$, то

$$MGHm = \frac{2a+3b}{2b}EF \times EB,$$

т. е. трапеция $MGHm$ всегда относится к соответствующему треугольнику $EBF :: 2a + 3b . b$.

Отсюда следует, что пространство $MGBA$, заключенное между перпендикулярами к эпициклоиде MG и AB, дугой BG и отрезком эпициклоиды MA, относится к сегменту соответствующего круга $BEZA :: 2a + 3b . b$ [103]).

Следствие III.

103. Очевидно, что квадратура произвольной части эпициклоиды зависит от квадратуры круга; но если взять OQ (черт. 87) — среднюю пропорциональную OK и OA — и описать таким радиусом дугу QEM, то я утверждаю, что пространство $ABEM$, заключенное

между диаметром AB, хордой BE, дугой EM и отрезком эпициклоиды AM, относится к треугольнику $EKB :: 2a + 3b . b$. Действительно, обозначив дугу AE или GB через u, а радиус OQ через z, будем иметь:

$$OB\,(b)\,.\,OQ\,(z) :: GB\,(u).RQ \quad \text{или} \quad ME = \frac{uz}{b}.$$

Следовательно, пространство $RGBQ$ и $MGBE$, т. е.

$$\overline{\frac{1}{2}GB + \frac{1}{2}RQ} \times BQ = \frac{zzu - bbu}{2b}.$$

Но (§ *102*) площадь эпициклоиды

$$MGBA = \frac{2a+3b}{b} \times BEZA =$$

Черт. 87.

$$= \frac{2a+3b}{b} \times EKB + \frac{2a+3b}{b} \times KEZA \left(\frac{au}{2}\right).$$

Значит, если отнять от этой площади предыдущую, то останется

$$ABEM = \frac{2aau + 3abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a+3b}{b} \times EKB =$$

$$= \frac{2a+3b}{b} \times EKB,$$

так как, по построению, $zz = 2aa + 3ab + bb$. Отсюда видно, что квадратура этого пространства не зависит от квадратуры круга, причем этим свойством обладает из всех ему подобных только это пространство.

Вот еще другое пространство, обладающее тем же свойством. Если отнять от пространства $ABEM$ сегмент $BEZA$ $\left(\frac{1}{2}au + EKB\right)$, то останется пространство

$$AZEM = \frac{2aau + 2abu + bbu - zzu}{2b} + \frac{2a + 2b}{b} \times EKB = \\ = \frac{2a + 2b}{b} \times EKB,$$

если положить $zz = 2aa + 2ab + bb$; т. е. если разделить полуокружность пополам при помощи точки E, то пространство $AZEM$ будет относиться к удвоенному треугольнику EKB, т. е. к квадрату радиуса : : $OK(a+b) . OB(b)$.

Следствие IV.

104. Если подвижной круг AEB (черт. 88) катится по неподвижному кругу BGD изнутри, то его диаметр AB из положительного становится отрицательным, и, следовательно, надо переменить знаки при членах, в которые он входит в нечетной степени [104]). Отсюда следует, что 1° Если провести MG, произвольный перпендикуляр к гипоциклоиде, и взять

$$OA(b - 2a) . OB(b) : : MG . GC,$$

то точка C окажется (*§ 100*) на развертке DCN, образованной качением круга с диаметром BN по внутренней стороне окружности NS, концентриче-

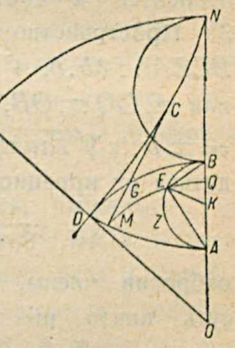
ской с BD. 2° Если описать из центра O дугу ME, то отрезок гипоциклоиды AM будет относиться (§ *101*) к хорде $AE : : 2b - 2a . b$. 3° Пространство $MGBA$ относится (§ *102*) к сегменту $BEZA : : 3b - 2a . b$. 4° Если взять

$$OQ = \sqrt{2aa - 3ab + bb},$$

т. е. средней пропорциональной к OK и OA, то пространство $ABEM$, заключенное между частью гипоциклоиды AM, дугой ME, хордой EB и диаметром AB, будет относиться (§ *103*) к треугольнику $EKB : : 3b - 2a \cdot b$. Но если взять

$$OQ \text{ или } OE = \sqrt{2aa - 2ab + bb},$$

т. е. так, чтобы дуга AE был четвертью окружности, то пространство $AZEM$, заключенное между частью гипоциклоиды AM и двумя дугами ME и AE, будет относиться (§ *103*) к треугольнику EKB, который в этом случае становится половиной квадрата радиуса : : $2b - 2a \cdot b$.



Черт. 88.

Следствие V.

105. Если предположить, что OB — радиус неподвижного круга (черт. 86) становится бесконечно большим, то дуга BGD обратится в прямую линию и кри-

вая AMD станет обыкновенной циклоидой. Так как в этом случае AB — диаметр подвижного круга — есть ничто по сравнению с диаметром неподвижного, то: 1° $MG.GC::b.b$. Действительно $b \pm 2a = b$, т. е. $MG = GC$, и, следовательно, если взять $BN = AB$ и провести прямую NS параллельно BD, то развертка DCN получится качением круга с диаметром BN по основанию NS. 2° Часть циклоиды AM (черт. 85, 88) относится к соответствующей хорде $AE::2b.b$. 3° Пространство $MGBA$ относится к сегменту $BEZA::3b.b$. 4° Из того, что BQ (черт. 87, 88), или $\pm OQ \mp OB$, которое я обозначу через x, будет $= \mp b \pm \sqrt{2aa \pm 3ab + bb}$, следует (если освободиться от иррациональности), что

$$xx \pm 2bx = 2aa \pm 3ab;$$

отбросив члены, не содержащие b, так как они суть ничто по сравнению с остальными, будем иметь $x = \frac{3}{2}a$. Следовательно, если взять в обыкновенной циклоиде

$$BP = \frac{3}{4}AB$$

и провести прямую PEM (черт. 83) параллельно основанию BD, то пространство $AMEB$ будет равняться утроенному треугольнику EKB. Действуя таким же образом, найдем, что если точка P попадает в центр K, то пространство $AZEM$, заключенное между частью циклоиды AM, прямой ME и дугой AE, равняется квадрату радиуса. Это было доказано уже раньше в *§ 99*.

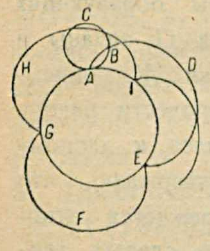
Замечание.

106. Из того, что дуги DG и GM (черт. 84) всегда равны между собой, следует, что угол DOG всегда относится к углу $GKM :: GK.OG$. Поэтому, если начало D циклоиды DMA, радиусы образующих кругов OG и GK и точка касания G заданы и угодно определить положение точки M, описывающей циклоиду, то достаточно провести радиус KM так, чтобы угол GKM относился к данному углу $DOG :: OG.GK$. Теперь я утверждаю, что когда отношение этих радиусов выражается отношением чисел, то это всегда можно сделать геометрическим путем; следовательно, тогда циклоида DMA будет геометрической.

Действительно, если положить, например, что $OG.GK :: 13.5$, то ясно, что угол MKG должен содержать данный угол DOG два раза и еще $^3/_5$ этого угла. Значит, вся трудность сводится к делению угла DOG на пять равных частей. А геометрам известно, что данный угол или данную дугу всегда можно геометрическим путем разделить на любое число равных частей, так как при этом всегда приходят к уравнению, содержащему только прямые линии. Значит, и т. д.

Я утверждаю кроме того, что циклоида DMA — механическая кривая, или (что то же самое) что ее точки M нельзя определить геометрическим путем, когда отношение OG к KG не выражается отношением чисел, т. е, когда оно иррационально,

Действительно (черт. 89) всякая как механическая, так и геометрическая линия либо замыкается либо простирается до бесконечности, так как ее образование всегда можно продолжить. Значит, если



Черт. 89.

подвижной круг *ABC* описывает при своем первом обороте посредством своей точки *A* циклоиду *ADE*, то эта циклоида еще не закончена, и, продолжая катиться, круг опишет вторую циклоиду *EFG*, затем третью *GHI* и т. д. до тех пор, пока образующая точка *A* после нескольких оборотов не вернется в свою исходную точку. Если затем снова начать качение подвижного круга *ABC*, он опять опишет ту же кривую линию, так что все эти циклоиды вместе составляют только одну кривую *ADEFGHI* и т. д. Если же радиусы образующих кругов несоизмеримы, то их окружности тоже будут несоизмеримы, и, следовательно, образующая точка *A* подвижного круга *ABC* никогда не сможет вернуться в точку *A* — неподвижного, из которой она вышла, как бы велико ни было число оборотов. Значит, получится бесчисленное множество циклоид, которые образуют, однако, одну кривую линию *ADEFGHI* и т. д. Если теперь провести через неподвижный круг бесконечную прямую, то ясно, что она пересечет кривую, продолженную до бесконечности, в бесконечном числе точек. А так как уравнение, выражающее природу

геометрической линии, должно иметь число измерений по меньшей мере равное числу различных точек, в которых эта линия может пересекаться с прямой, то уравнение, выражающее природу этой кривой, будет иметь бесконечное число измерений. А так как это невозможно, то очевидно, что кривая должна быть механической или трансцендентной [105]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

Задача.

107. Дана *кривая* BFC (черт. 90); *найти бесчисленное множество линий* AM, BN, EFO, *для которых она является общей разверткой.*

Если кривую BFC развернуть, начиная с точки A, то ясно, что все точки A, B, F нити $ABFC$ опишут при этом движении кривые линии AM, BN, FO, которые все будут иметь общей разверткой данную кривую BFC. Но надо заметить, что начало кривой FO не будет в точке F, так как ее разверткой является только часть FC. Для нахождения этого начала нужно развернуть оставшуюся часть BF, начиная с точки F, чтобы описать часть EF кривой EFO, которая имеет начало в E и разверткой которой является вся кривая BFC.

Черт. 90.

Если угодно найти точки M, N, O, не пользуясь нитью $ABFC$, то достаточно взять на любой касательной CM, отличной от BA, отрезки CM, CN, CO, равные $ABFC$, BFC, FC.

Следствие.

108. Очевидно, что:

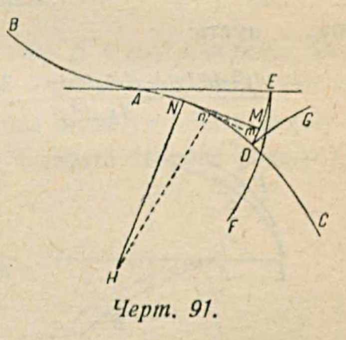
1° Кривые AM, BN, EFO очень различны по природе; так, например, у кривой AM в ее вершине A радиус развертки равен AB, в то время как у кривой BN он равен нулю. Также из самой формы кривой EFO ясно, что она сильно отличается от кривых AM и BN.

2° Кривые AM, BN, EFO будут геометрическими, только когда данная BFC — геометрическая и вдобавок спрямляемая. Действительно, если она не геометрическая, то, взяв BK за абсциссу, нельзя будет найти геометрически ординату KC, а если она не спрямляемая, то, проведя касательную CM, невозможно будет определить геометрически точки M, N, O кривых AM, BN, EFO, потому что нельзя будет найти геометрически прямолинейные отрезки, равные кривой линии BFC и ее частям BF, FC [105]).

Замечание.

109. Если кривую линию BAC (черт. 91), имеющую точку перегиба A, развернуть, начиная с точки D, отличной от точки перегиба, то при развертывании части BAD образуется часть DEF, а при развертывании части DC — остальная часть DG, так что $FEDG$

будет вся кривая, полученная развертыванием BAC. Очевидно, что эта кривая возвращается обратно в точках D и E с тою разницей, что в точке возврата D части DE и DG обращены одна к другой выпуклостью, в то время как в точке E части DE и EF вогнуты с одной и той же стороны. В предыдущей главе показывалось, как находить точки возврата, подобные D; теперь спрашивается, как определять точки E, которые можно назвать точками возврата второго рода и которые никем из известных мне лиц еще не рассматривались.



Черт. 91.

Чтобы достигнуть цели, проведем к части DE два произвольных перпендикуляра MN и mn, ограниченных разверткой в точках N и n, в которых восставим вторые перпендикуляры NH и nH к первым NM и nm. При этом образуются два малых сектора MNm и NHn; они подобны, потому что углы MNm и NHn равны Значит, мы будем иметь:

$$Nn.Mm::NH.NM.$$

Но в точке перегиба A радиус NH становится (§ 81) бесконечностью или нулем, а радиус MN, который обращается в AE, остается конечной величины. Следовательно, в точке возврата второго рода E отно-

шение Nn, диференциала радиуса развертки MN, к Mm, диференциалу кривой, должно стать или бесконечно большим или бесконечно малым. Вследствие того, что (§ 86)

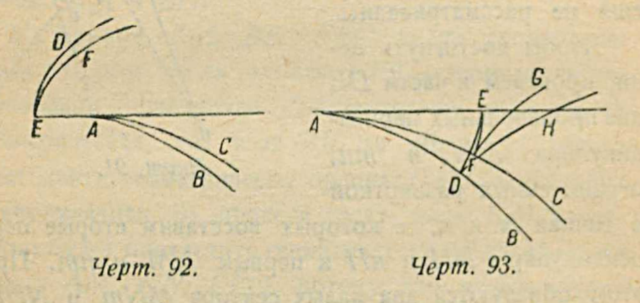
$$Nn = \frac{-3dx\,dy\,ddy^2\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{1}{2}} + dx\,dddy\,\overline{dx^2+dy^2}^{\frac{3}{2}}}{dx^2\,ddy^2}$$

и

$$Mm = \sqrt{dx^2+dy^2},$$

будем иметь:

$$\frac{dx^2\,dddy + dy^2\,dddy - 3dy\,ddy^2}{dx\,ddy^2} = 0 \text{ или } \infty;$$



Черт. 92. *Черт. 93.*

умножив на $dx\,ddy^2$, найдем формулу:

$$dx^2\,dddy + dy^2\,dddy - 3dy\,ddy^2 = 0 \text{ или } \infty,$$

которая и служит для определения точек возврата второго рода.

Можно еще предположить, что возвратная кривая второго рода DEF (черт. 92, 93) или $HDEFG$ имеет разверткой такую возвратную кривую второго рода

BAC, что ее точка возврата A соответствует точке возврата E, т. е. находится на радиусе развертки, выходящем из точки E. При этом предположении ясно, что радиус развертки EA будет всегда *наименьшим* или *наибольшим*, следовательно, диференциал общего выражения (*§ 78*) радиуса развертки

$$\frac{\overline{dx^2 + dy^2}^{\frac{3}{2}}}{-dx\,ddy}$$

должен быть в искомой точке E нулем или бесконечностью; это приводит к той же формуле, что и прежде, и таким образом она является общей формулой для нахождения точек возврата второго рода [107].

ГЛАВА VI.

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НАХОЖДЕНИЮ КАУСТИК ОТРАЖЕНИЯ.

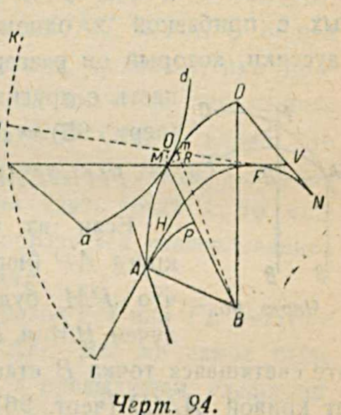
Определение.

ПРЕДПОЛОЖИМ, что из светящейся точки B исходит бесконечное множество лучей BA, BM, BD (черт. 94, 95), которые отражаются от кривой AMD, причем углы отражения равны углам падения. Линия HFN, которой касаются отраженные лучи или их продолжения AH, MF, DN, называется *каустикой отражения* [108]).

Следствие I.

110. Если продолжить HA до точки I так, чтобы $AI = AB$ (черт. 94), и развернуть каустику HFN, начиная с точки I, то получится кривая ILK, обладающая тем свойством, что касательная FL (§ 75)

всегда равна отрезку каустики FH плюс прямая HI. Если взять два бесконечно близких к BM, MF падающих и отраженных луча Bm, mF, продолжить Fm до l и описать из центров F и B малые дуги MO и MR, то получатся прямоугольные треугольники MOm и MRm. Эти треугольники конгруэнтны, так как при общей гипотенузе Mm и равенстве углов $OmM = FmD = RmM$ малые стороны [109]) Om и Rm будут тоже равны. Так как Om есть диференциал LM, а Rm — диференциал BM, и это имеет место, где бы ни взять точку M, то $ML - IA$, или $AH + HF - MF$, сумма (§ 96) всех диференциалов Om на отрезке кривой AM, равна $BM - BA$, сумме (§ 96) всех диференциалов Rm на том же отрезке кривой. Поэтому HF, отрезок каустики HFN, будет равен:



Черт. 94.

$$BM - BA + MF - AH \text{ [110]}).$$

Черт. 95.

Возможны различные случаи в зависимости от того, будет ли падающий луч BA больше или меньше

BM и будет ли отраженный луч AH при переходе к лучу MF развертывать или обвертывать отрезок HF. Но так же, как и здесь, всегда можно доказать, что разность падающих лучей равна разности отраженных с прибавкой к одному из них того отрезка каустики, который он развертывает, прежде чем совпасть с другим. Например, $BM - BA$ (черт. 95) $= MF + FH - AH$, откуда

$$FH = BM - BA + AH - MF.$$

Черт. 96.

Если из центра B описать дугу круга AP (черт. 94, 95), то очевидно, что PM будет разностью падающих лучей BM и BA. Если предположить, что светящаяся точка B станет бесконечно удаленной от кривой AMD (черт. 96), то падающие лучи BA и BM станут параллельными и дуга AP обратится в прямую, перпендикулярную к этим лучам.

Следствие II.

111. Если фигуру $BAMD$ (черт. 94) повернуть в ее плоскости так, чтобы точка B попала в точку I и чтобы касательная в точке A к кривой AMD в ее первоначальном положении осталась касательной и в новом положении, и заставить кривую aMd катиться по AMD, т. е. по себе самой, так, чтобы отрезок aM оставался равным отрезку AM, то, утверждаю я, точка B в своем движении опишет некую рулетту ILK, разверткой которой является каустика HFN.

Действительно, из образования кривой следует, что: 1° Линия LM, соединяющая образующую точку L с точкой касания M, будет (§ 43) перпендикулярной к кривой ILK. 2° La или $IA = BA$ и $LM = BM$. 3° Углы, образуемые прямыми ML и BM с общей касательной в точке M, равны, и, значит, при продолжении LM до F луч MF окажется отраженным лучом для падающего луча BM. Отсюда видно, что перпендикуляр LF касается каустики HFN, а так как это имеет место, где бы ни взять точку L, то, следовательно, кривая ILK образуется развертыванием каустики HFN и прямой HI.

Отсюда следует, что отрезок FH или $FL - HI = BM + MF - BA - AH$. Это же самое было доказано другим способом в предыдущем следствии.

Следствие III.

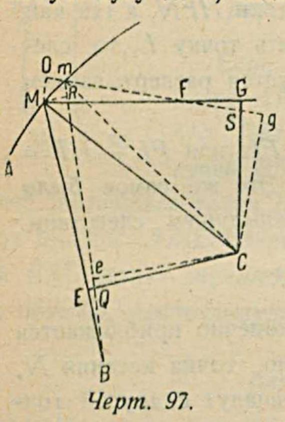
112. Если касательная DN бесконечно приближается к касательной FM, то, очевидно, точка касания N, как и точка пересечения N, совпадут с другой точкой касания F. Таким образом, чтобы найти точку F, в которой отраженный луч MF касается каустики HFN, надо только найти точку пересечения бесконечно близких отраженных лучей MF и mF. В самом деле, если представить себе бесконечное множество бесконечно близких друг к другу падающих лучей, то видно, что пересечения отраженных лучей образуют многоугольник с бесконечным множеством сторон, совокупность которых образует каустику HFN.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

Общая задача.

113. Даны *природа кривой* AMD (черт. 97), *светящаяся точка* B *и падающий луч* BM. *Найти на заданном по положению отраженном луче* MF *точку* F, *в которой он касается каустики.*

Найдя, как в предыдущей главе, MC — длину радиуса развертки в точке M — и взяв бесконечно малую дугу Mm, надо провести прямые Bm, Cm и Fm, описать из центров B и F малые дуги MR и MO, провести к падающим и отраженным лучам перпендикуляры CE, Ce, CG и Cg и обозначить данные: BM через y, ME или MG через a.



Черт. 97.

Затем можно доказать, как и в следствии первом (*§ 110*), что треугольники MRm и MOm конгруэнтны и, значит, $MR = MO$. А из равенства углов падения и отражения следует, что: $CE = CG$, $Ce = Cg$; значит, $CE - Ce$ или $EQ = CG - Cg$ или SG. Итак, из подобия треугольников BMR и BEQ, FMO и FGS следует, что

$$BM + BE\ (2y - a) . BM\ (y) ::$$

$$:: MR + EQ \text{ или } MO + GS . MR \text{ или } MO ::$$

$$:: MG\ (a) . MF = \frac{ay}{2y - a}.$$

Если светящаяся точка B и точка E оказываются по разные стороны точки M, или, что то же, кривая AMD обращена выпуклостью к светящейся точке B, то y из положительного становится отрицательным, и следовательно,

$$MF = \frac{-ay}{-2y-a} \text{ или } \frac{ay}{2y+a} \text{ }^{111}).$$

Если предположить, что y становится бесконечным, т. е. точка B (черт. 96) бесконечно удаляется от кривой AMD, то лучи падения будут параллельны между собой и $MF = \frac{1}{2}a$, так как a будет ничем по сравнению с $2y$.

Следствие I.

114. Так как для MF (черт. 94, 95) получается единственное значение, в которое входит радиус развертки, то кривая AMD может иметь только одну каустику отражения (*§ 80*), ибо у нее имеется только одна развертка.

Следствие II.

115. Если AMD есть линия геометрическая (черт. 97), то (*§ 85*) очевидно, что ее развертка — тоже геометрическая линия, т. е. все точки C находятся геометрически. Следовательно, все точки F каустики могут быть определены геометрически, т. е. каустика HFN (черт. 94, 95) будет геометрической линией. Я утверждаю сверх того, что эта каустика будет всегда спрямляема, ибо очевидно (*§ 110*), что при помощи

геометрической по предположению кривой AMD можно найти прямые линии, равные любым отрезкам этой каустики.

Следствие III.

116. Если кривая AMD (черт. 97) обращена выпуклостью к светящейся точке B, то величина $MF\left(\frac{ay}{2y+a}\right)$ всегда положительна, поэтому точку F надо взять с той же стороны точки M, с которой находится точка C, как и предполагалось при выкладках. Отсюда видно, что бесконечно близкие отраженные лучи расходятся.

Но если кривая AMD обращена вогнутостью к светящейся точке B, то величина $MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right)$ будет положительной, если y больше $\frac{1}{2}a$, отрицательной — если меньше, и бесконечно большой при $y=\frac{1}{2}a$. Отсюда следует, что если построить круг с диаметром, равным половине радиуса развертки MC, то бесконечно близкие отраженные лучи будут сходиться, если светящаяся точка B окажется вне этого круга, расходиться — если она окажется внутри него, и будут итти параллельно, если точка B окажется на окружности.

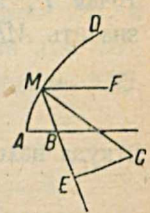
Следствие IV.

117. Если падающий луч BM касается кривой AMD в точке M, то $ME(a)=0$ и значит $MF=0$. Так как в этом случае отраженный луч совпадает по на-

правлению с падающим и природа каустики состоит в том, что она касается всех отраженных лучей, то, следовательно, она касается и падающего луча BM в точке M, т. е. каустика и данная кривая будут иметь в своей общей точке M общую касательную.

Если радиус развертки MC равен нулю, то снова $ME(a) = 0$, и значит $MF = 0$. Отсюда видно, что данная кривая и каустика образуют в своей общей точке M угол, равный углу падения.

Если радиус развертки CM бесконечно велик, то малая дуга Mm обращается в прямую линию и $MF = \mp y$, так как при $ME(a)$, бесконечно большом, y будет ничем по сравнению с a. А так как это величина отрицательная, если точка B и точка C находятся по одну сторону от линии AMD, и положительная, если они находятся по разные ее стороны, то, следовательно, когда линия AMD — прямая, бесконечно близкие отраженные лучи будут расходиться.



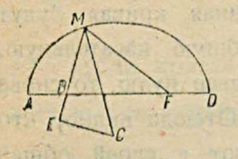
Черт. 98.

Следствие V.

118. Очевидно, что если даны любые две из трех точек B, C, F, то легко найти третью.

1° Пусть кривая AMD (черт. 98) — парабола с фокусом в светящейся точке B. Из основ теории конических сечений легко видно, что все отраженные лучи параллельны оси, следовательно, MF будет всегда бесконечно велико, где бы ни взять точку M. Таким

образом $a=2y$, откуда следует, что если взять ME равным удвоенному MB и провести перпендикуляр EC, то он пересечется с MC, перпендикуляром к кривой AMD, в точке C, которая находится на развертке этой кривой.



Черт. 99.

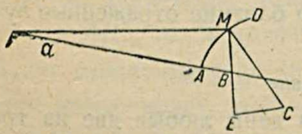
2° Пусть кривая AMD (черт. 99) — эллипс, в одном из фокусов которого находится светящаяся точка B. Очевидно, что все отраженные лучи MF пересекутся в одной точке F, являющейся другим фокусом. Если обозначить MF через z, то (*§ 113*)

$$z=\frac{ay}{2y-a},$$

откуда находится искомое

$$ME(a)=\frac{2yz}{y+z}.$$

Если же кривая AMD — гипербола, то фокус F окажется по другую ее сторону, следовательно, MF (z) будет отрицательным, и значит:



Черт. 100.

$$ME(a)=\frac{-2yz}{y-z} \text{ или } \frac{2yz}{z-y}.$$

Это дает следующее построение, приложимое также и к эллипсу.

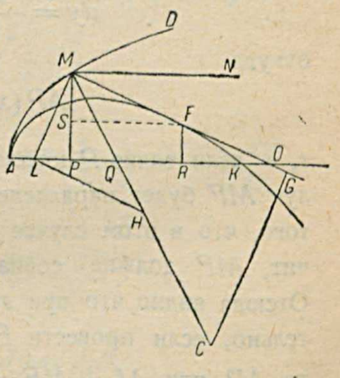
Берем ME (черт. 99 и 100) — четвертую пропорциональную к половине большой оси [112])

падающему и отраженному лучам — и проводим перпендикуляр EC; он пересечется с линией MC, перпендикулярной к коническому сечению, в точке C, находящейся на развертке.

Пример I.

119. Пусть линия AMD (черт. 101) — парабола, причем падающие лучи PM перпендикулярны к ее оси AP. Требуется найти на отраженных лучах MF точки F их прикосновения к каустике AFK [113]).

Очевидно, что, проведя радиус развертки MC и опустив перпендикуляр CG на отраженный луч MF, придется (*§ 113*) взять MF равным половине MG. Но это построение можно сократить, заметив, что если провести MN параллельно оси AP и прямую ML до фокуса L, то углы LMP и FMN будут равны, так как, по свойству параболы, $LMQ = QMN$, а по предположению $PMQ = QMF$. Если прибавить к обеим сторонам [равенства] один и тот же угол PMF, то угол LMF будет равен углу PMN, т. е. будет прямым. Но доказано (*§ 118*), что LH, перпендикулярная к ML, пересекает радиус развертки MC



Черт. 101.

в его середине H. Значит, если провести MF, равную и параллельную LH, то она окажется одним из отраженных лучей и коснется каустики AFK в точке F. Что и требовалось найти.

Если предположить, что отраженный луч MF параллелен оси AP, то очевидно, что точка каустики F будет сколь возможно более удаленной от оси AP, так как касательная в этой точке параллельна оси. Для того чтобы определить эту точку на всех каустиках вроде AFK, образованных лучами, падающими перпендикулярно к оси данной кривой, достаточно заметить, что MP должно быть тогда равно PQ. Это дает $dy = dx$. Пусть $ax = yy$, тогда получается:

$$dy = \frac{a\,dx}{2\sqrt{ax}} = dx,$$

откуда

$$AP(x) = \frac{1}{4}a;$$

т. е. если точка P попадает в фокус L, то отраженный луч MF будет параллелен оси. Это впрочем ясно из того, что в этом случае MP совпадает с LM и, значит, MF должна совпасть с MN, а LH с LQ. Отсюда видно, что при этом MF равна ML; следовательно, если провести FR перпендикулярно к оси, то AR или $AL + MF = \frac{3}{4}a$. Очевидно также, что отрезок каустики AF равен в этом случае параметру, ибо он всегда (§ *110*) равен $PM + MF$.

Чтобы определить K, точку пересечения каустики AFK с осью AP, надо найти значение MO

и приравнять его значению MF, так как очевидно что, когда точка F попадает в K, линии MF и MO становятся равными между собой.

Обозначим неизвестное MO через t; перпендикуляр к кривой MQ делит угол PMO пополам. Отсюда следует, что:

$$MP(y) \,.\, MO(t) :: PQ\left(y\frac{dy}{dx}\right) \,.\, OQ = \frac{t\,dy}{dx}.$$

Следовательно,

$$OP = \frac{t\,dy + y\,dy}{dx} = \sqrt{tt - yy}$$

(из прямоугольного треугольника MPO); при делении обеих сторон [равенства] на $t + y$ получается:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{t-y}{t+y}},$$

откуда

$$MO(t) = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 - dy^2} = MF\left(\frac{1}{2}\,a\right) = \frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy},$$

так как (§ 77)

$$ME(a) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}.$$

Отсюда

$$dy^2 - 2y\,ddy = dx^2,$$

что и служит для нахождения такой точки P, для которой падающий из нее луч PM даст отраженный луч MF, который касается каустики AFK в K, точке ее пересечения с осью AP.

Для параболы $y = x^{\frac{1}{2}}$, $dy = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} dx$, $ddy = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} dx^2$; при подстановке этих значений в предыдущее уравнение получается:

$$\frac{1}{4} x^{-1} dx^2 + \frac{1}{2} x^{-1} dx^2 = dx^2,$$

откуда

$$AP(x) = \frac{3}{4} \text{ параметра.}$$

Чтобы определить вид каустики AFK по способу Декарта, надо найти уравнение, выражающее связь между абсциссой $AR(u)$ и ординатой $RF(z)$. Это делается следующим образом.

Раз

$$MO(t) = \frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 - dy^2},$$

то

$$PO\left(\frac{t\,dy + y\,dy}{dx}\right) = \frac{2y\,dx\,dy}{dx^2 - dy^2};$$

а из подобия треугольников MPO и MSF получаются пропорции:

$$MO\left(\frac{y\,dx^2 + y\,dy^2}{dx^2 - dy^2}\right) . MF\left(\frac{dx^2 + dy^2}{-2ddy}\right) \text{ или } -2y\,ddy . dx^2 - dy^2 :$$

$$: : MP(y) . MS(y - z)) = \frac{dx^2 - dy^2}{-2ddy} : :$$

$$: : PO\left(\frac{2y\,dx\,dy}{dx^2 - dy^2}\right) . SF \text{ или } PR\ (u - x) = \frac{dx\,dy}{-ddy} .$$

Таким образом получаются два уравнения:

$$z = y + \frac{dy^2 - dx^2}{-2ddy} \quad \text{и} \quad u = x + \frac{dx\,dy}{-ddy},$$

служащие вместе с уравнением кривой для составления нового уравнения, в которое x и y уже не войдут и которое, следовательно, выразит связь между $AR(u)$ и $FR(z)$.

Когда кривая AMD — парабола, как предполагалось в этом примере, то

$$z = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{3}{2}}$$

или (возводя обе стороны [равенства] в квадрат)

$$\frac{9}{4}x - 6xx + 4x^3 = zz$$

и

$$u = 3x;$$

отсюда получается искомое уравнение, выражающее природу каустики AFK, именно:

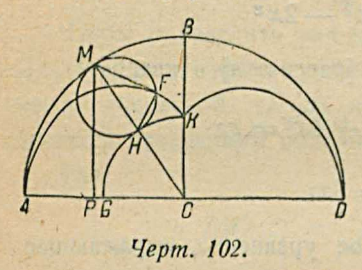
$$azz = \frac{4}{27}u^3 - \frac{2}{3}auu + \frac{3}{4}aau.$$

Можно заметить, что PR всегда равно удвоенному AP, потому что $AR(u) = 3x$, что дает еще один способ определять на отраженном луче MF искомую точку F.

Пример II.

120. Пусть кривая AMD (черт. 102) — полукруг, имеющий диаметром линию AD и центром точку C; пусть лучи падения PM перпендикулярны к AD.

Развертка круга стягивается в одну точку, а именно — его центр; поэтому HF, перпендикуляр, опущенный на отраженный луч MF из точки H — середины радиуса CM, пересечется (*§ 113*) с этим лучом в F — точке его прикосновения к каустике AFK. Очевидно, что отраженный луч MF равен половине падающего PM. Из этого следует, что: 1° при совпадении точки P с C точка F совпадает с K, серединой CB; 2° отрезок AF равен утроенному MF, а каустика AFK — утроенному BK. Также можно видеть, что если взять в качестве угла ACM половину прямого, то отраженный луч MF будет параллелен AC, и, следовательно, точка F окажется над диаметром AD выше всех остальных точек каустики.



Черт. 102.

Окружность, имеющая диаметром MH, проходит через точку F, так как угол HFM — прямой. Если из центра C описать радиусом CK или CH, равным половине CM, круг KHG, то дуга HF будет равна дуге HK, так как из равенства углов CMF и CMP или HCK следует, что дуги $\frac{1}{2}HF$ и HK, измеряющие эти углы в кругах MFH и KHG, относятся между собой, как радиусы $\frac{1}{2}MH$ и HC этих кругов. Отсюда видно, что каустика AFK есть эпици-

клоида, образованная качением подвижного круга MFH по неподвижному кругу KHG. Начало ее — в точке K, а вершина в A [114]).

Пример III.

121. Пусть кривая AMD (черт. 103) — круг, имеющий диаметром линию AD, а центром точку C. Пусть светящаяся точка A, откуда исходят все падающие лучи AM, есть один из концов диаметра AD.

Если из центра C опустить перпендикуляр CE на падающий луч AM, то согласно свойству круга точка E разделит хорду AM пополам; таким образом

$$ME(a) = \frac{1}{2}y.$$

Следовательно,

$$MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{3}y,$$

Черт. 103.

т. е. отраженный луч MF надо взять равным трети падающего AM. Отсюда видно, что

$$DK = \frac{1}{3}AD, \quad CK = \frac{1}{3}CD$$

(*§ 110*) и что каустика

$$AFK = \frac{4}{3}AD,$$

а ее отрезок $AF = \frac{4}{3}AM$.

Если взять $AM = AC$, то отраженный луч MF будет параллельным диаметру AD, и, следовательно,

точка F будет наивысшей точкой каустики над этим диаметром.

Если взять $CH = \frac{1}{3} CM$ и провести HF перпендикулярно к MF, точка F окажется на каустике, ибо очевидно, что раз HL перпендикулярна к AM и $MH = \frac{2}{3} CM$, то

$$ML = \frac{2}{3} ME = \frac{1}{3} AM.$$

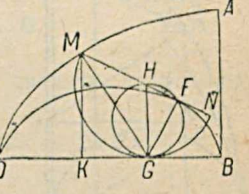
Значит, круг, имеющий диаметром MH, пройдет через точку F каустики, и если из центра C описать радиусом CK или CH другой круг KHG, то эти круги будут между собою равны и дуга HK будет равна дуге HF. Действительно, в равнобедренном треугольнике CMA внешний угол $KCH = 2CMA = AMF$; следовательно, дуги HK и HF, измеряющие эти углы в одинаковых кругах, будут между собою равны. Каустика AFK — опять эпициклоида с началом в точке K и с вершиной в A, образованная качением подвижного круга MFH по неподвижному KHG.

Это можно доказать еще и другим способом. Эпициклоида, образованная качением круга, равного кругу AMD, по нему самому, начиная с точки A, будет иметь разверткой, как это доказано в следствии *II* (*§ 111*), каустику AFK. Эта развертка (*§ 100*) — такая же эпициклоида, и значит, диаметры обоих образующих кругов одинаковы. Точка K определится, если взять CK третьей пропорциональной к $CD + DA$ и CD, т. е. равной $\frac{1}{3} CD$. Следовательно, и т. д. [115]).

Пример IV.

122. Пусть кривая AMD (черт. 104) есть обыкновенная полуциклоида, образованная качением полукруга NGM по прямой BD и имеющая вершину в точке A, а начало — в D. Пусть лучи падения KM параллельны оси AB.

Из того, что MG (§ 95) равна половине радиуса развертки, следует, что если провести GF перпендикулярно к отраженному лучу MF, то точка F окажется на каустике DFB. Отсюда видно, что MF надо взять равным KM.



Черт. 104.

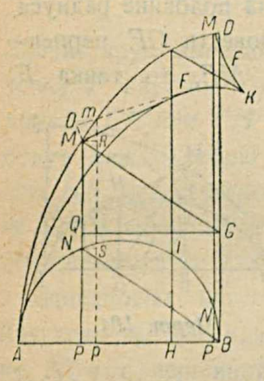
Если из H, центра образующего круга MGN, провести в образующую точку M и в точку касания G радиусы HM и HG, то ясно, что HG будет перпендикулярен к BD и угол $GMH = MGH = GMK$; отсюда видно, что отраженный луч MF проходит через центр H. Круг, имеющий диаметром GH, также проходит через точку F, ибо угол GFH прямой. Значит дуги GN и $\frac{1}{2}GF$, измеряющие один и тот же угол GHN, будут относиться между собой, как MN и GH — диаметры их кругов; следовательно, дуга $GF = GN = GB$. Итак, очевидно, что каустика DFB есть циклоида, образованная полным обращением круга GFH, катящегося по прямой BD [116]).

Пример V.

123. Пусть снова кривая AMD (черт. 105) есть обыкновенная полуциклоида, основание которой BD равно полуокружности ANB образующего круга. И пусть теперь падающие лучи PM параллельны основанию BD.

Если провести GQ перпендикулярно к PM, прямоугольные треугольники GQM и BPN будут конгруэнтны, следовательно,

$$MQ = PN.$$



Черт. 105.

Отсюда видно, что (§ *95, 113*) MF надо взять равным PN, ординате, соответствующей ему в образующем полукруге ANB.

Чтобы точка F была возможно более удаленной от оси AB, надо, чтобы MF — касательная в ней — была параллельна этой оси. Значит, угол PMF будет прямым, а его половина PMG или PNB — половиной прямого, и, следовательно, точка P попадет в центр круга ANB.

Следует отметить, что, при непрерывном приближении точки P к концу B, точка F тоже приближается к оси AB до некоторой точки K, а затем она от нее удаляется до D. Таким образом каустика $AFKFD$ имеет точку возврата в K.

Для определения ее я замечу (*§ 110, 111*), что отрезок $AF = PM + MF$, отрезок $AFK = HL + LK$, а отрезок KF части KFD есть $HL + LK - PM - MF$. Отсюда видно, что $HL + LK$ должно быть наибольшим. Поэтому, обозначая AH через x, HI через y, дугу AI через u, получим:

$$HL + LK = u + 2y.$$

Диференциал этого дает:

$$du + 2\,dy = 0,$$

или, подставляя вместо du его значение $\frac{a\,dx}{y}$,

$$\frac{a\,dx}{y} + 2\,dy = 0.$$

Отсюда, а также на основании свойств круга, получается:

$$a\,dx = -2y\,dy = 2x\,dx - 2a\,dx;$$

следовательно,

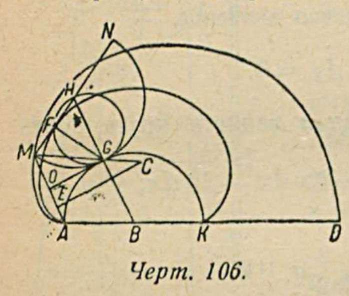
$$AH\,(x) = \frac{3}{2}a \text{ [117]}.$$

Следствие.

124. Пространство AFM или $AFKFM$, заключенное между отрезками кривых AF или $AFKF$ и AM и отраженным лучом MF, равно половине части круга APN. Это следует из того, что сектор FMO, диференциал пространства AFM, равен половине прямоугольника $PpSN$ — диференциала пространства APN, так как прямоугольные треугольники MOm и MRm конгруэнтны и $MO = MR$ или NS или Pp, а $MF = PN$ [118]).

Пример VI.

125. Пусть AMD (черт. 106) — полуэпициклоида с началом в точке A и вершиной в D, образованная качением круга MGN по одинаковому с ним кругу AGK. Пусть все падающие лучи AM исходят из точки A. Линия BH, соединяющая центры обоих образующих кругов, всегда проходит через точку их прикосновения G, и дуги GM и GA, так же как и их хорды, всегда равны между собой; точно так же угол $HGM = BGA$, а угол $GMA = GAM$. Далее, угол $HGM + BGA = GMA + GAM$, так как, прибавив с каждой стороны угол AGM, мы получим два прямых. Поэтому угол HGM будет всегда равен углу GMA, а следовательно, и углу отражения GMF; откуда следует, что MF всегда проходит через H — центр подвижного круга.



Черт. 106.

Если теперь опустить перпендикуляры CE и GO на падающий луч AM, то, очевидно,

$$MO = OA \text{ и } OE = \frac{1}{3} OM;$$

и, так как (*§ 100*) точка C находится на развертке

$$GC = \frac{1}{3} GM.$$

Итак,

$$ME = \frac{2}{3} AM,$$

т. е.

$$a = \frac{2}{3} y,$$

и, следовательно,

$$MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = \frac{1}{2} y;$$

отсюда видно, что если провести GF перпендикулярно к MF, то точка F будет на каустике AFK.

Круг, имеющий диаметром GH, проходит через точку F; и так как дуги GM и $\frac{1}{2} GF$, измеряющие один и тот же угол GHM, относятся между как MN и GH, диаметры их кругов, то дуга GF равна дуге GM и, следовательно, дуге GA. Отсюда видно, что каустика AFK есть эпициклоида, образованная качением подвижного круга HFG по неподвижному AGK.

Следствие.

126. Опишем из центра B круг радиусом, равным BH или AK, и пусть на окружность падает бесконечное множество прямых, параллельных BD. Легко видеть (*§ 120*), что при отражении они образуют ту же каустику AFK.

Пример VII.

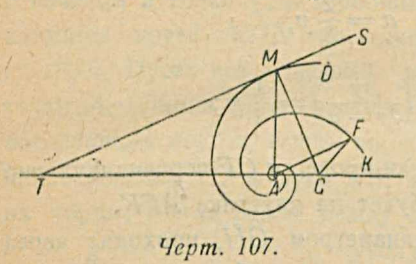
127. Пусть кривая AMD (черт. 107) — логарифмическая спираль, и все лучи падения исходят из центра A.

Если через конец радиуса развертки C провести прямую CA, перпендикулярную к лучу падения AM, то она пересечет его (§ 91) в центре A. Поэтому

$$AM(y) = a,$$

и, следовательно,

$$MF\left(\frac{ay}{2y-a}\right) = y.$$



Черт. 107.

Таким образом треугольник AMF — равнобедренный, и так как угол падения AMT равен углу отражения FMS, то угол AFM равен углу AMT.

Отсюда ясно, что каустика AFK будет логарифмической спиралью, которая отличается от данной спирали AMD только расположением [119]).

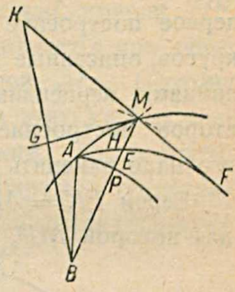
ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

Задача.

128. Дана *каустика отражения* HF (*черт. 108*), *со светящейся точкой* B. *Найти бесконечное множество кривых, таких, как* AM, *для которых она является каустикой отражения.*

Возьмем на любой касательной HA произвольную точку A в качестве одной из точек искомой кривой AM и опишем из центра B радиусом BA дугу круга AP и каким-нибудь другим радиусом BM —

дугу другого круга. Возьмем $AH + HE = BM - BA$ или PM и развернем каустику HF, начиная с точки E. При этом движении образуется кривая EM, которая пересечется с дугой круга, описанной радиусом BM, в точке M, принадлежащей (§ 110) кривой AM, так как по построению $PM + MF = AH + HF$.



Черт. 108.

Или же, привязав концы нити BMF в точках B и F, натянем ее при помощи иглы, помещенной в M, а затем начнем перемещать иглу таким образом, чтобы кусок нити MF свертывал каустику HF. Очевидно, что при этом движении игла опишет искомую кривую MA.

Другое решение.

129. Проведя произвольную касательную FM, отличную от HA, надо найти на ней точку M, для которой

$$BM + MF = BA + AH + HF.$$

Это делается следующим образом.

Взяв $FK = BA + AH + HF$ и точку G в середине BK, проведем перпендикуляр GM; он пересечет касательную FM в искомой точке M, так как $BM = MK$.

Если точка B (черт. 109) бесконечно удалена от кривой AM, т. е. падающие лучи BA и BM параллельны некоторой заданной по положению прямой, то первое построение все же имеет место, причем дуги кругов, описанные из центра B, становятся прямыми линиями, перпендикулярными к падающим лучам. Но второе построение окажется бесполезным; поэтому его надо заменить нижеприведенным.

Берем $FK = AH + HF$ и находим такую точку M, для которой MP, параллельная AB, перпендикуляру к AP, равна MK. Эта точка, очевидно (*§ 110*), окажется на искомой кривой AM, так как

$$PM + MF = AH + HF.$$

Находится точка M следующим образом.

На AP опускают перпендикуляр KG, и, взяв $KO = KG$, проводят KP параллельно OG и PM параллельно GK. Я утверждаю, что M будет искомой точкой. Действительно, из подобных треугольников GKO и PMK следует, что

$$PM = MK,$$

так как

$$GK = KO.$$

Черт. 109.

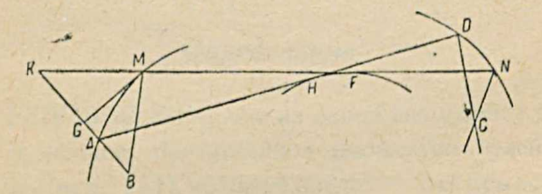
Если каустика HF стягивается в точку, кривая AM становится коническим сечением [120].

Следствие I.

130. Очевидно, что кривая, проходящая через все точки K, образуется развертыванием кривой HF, начиная с точки A, и природа ее меняется при перемене места точки A на касательной AH. Поэтому раз все кривые AM получаются из этих кривых одинаковым, и притом геометрическим, построением, то (§ *108*) они будут различной природы и геометрическими будут только тогда, когда является геометрической и спрямляемой каустика HF.

Следствие II.

131. Даны кривая DN (черт. 110) и светящаяся точка C. Найти бесконечное множество таких



Черт. 110.

линий AM, чтобы отраженные лучи DA, NM, отразившись от них вторично, сошлись в данной точке B.

Если представить, что кривая HF — каустика данной кривой DN, образованная светящейся точкой C, то, очевидно, эта же линия HF должна быть каустикой кривой AM при данной светящейся точке B.

Таким образом

$$FK = BA + AH + HF$$

и

$$NK = BA + AH + HF + FN =$$
$$= BA + AD + DC - CN,$$

так как (§ *110*)

$$HD + DC = HF + FN + NC.$$

Это дает следующее построение.

Выбрав, в качестве одной из точек искомой кривой AM, на каком-либо отраженном луче произвольную точку A, возьмем на каком-либо другом отраженном луче NM часть

$$NK = BA + AD + DC - CN;$$

искомая точка M найдется тогда, как выше в § *129*.

ГЛАВА VII

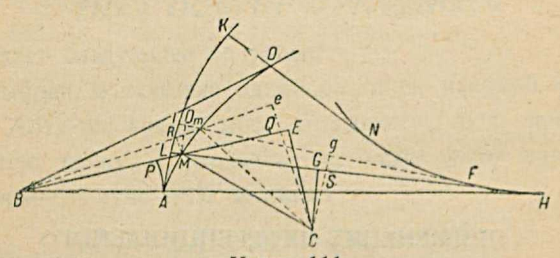
ПРИМЕНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К НАХОЖДЕНИЮ КАУСТИК ПРЕЛОМЛЕНИЯ

Определение

ПРЕДПОЛОЖИМ, что из одной светящейся точки B исходит бесчисленное множество лучей BA, BM, BD (черт. 111), которые преломляются при встрече с кривой AMD, приближаясь к ее перпендикулярам MC или удаляясь от них, так что CE, синусы углов падения CME, всегда находятся к CG, синусам углов преломления CMG, в данном отношении m к n. Кривая HFN, которой касаются все преломленные лучи или их продолжения AH, MF, DN (черт. 112), называется *каустикой преломления*.

Следствие.

132. При обвертывании каустики *HFN*, начиная с точки *A*, получается такая кривая *ALK*, что сумма касательной *LF* и отрезка каустики *FH* будет всегда равна одной и той же прямой *AH*. Если представить себе другую касательную *Fml*, бесконечно близкую к *FML*, с другим лучом падения *Bm* и описать из центров *F* и *B* малые дуги *MO* и *MR*, то получатся два прямоугольных треугольника: *MRm*, подобный *MEC*, и *MOm*, подобный *MGC*. Действительно, если отнять от прямых углов *RME* и *CMm* один и тот же угол *EMm*, то остающиеся углы *RMm* и *EMC* будут равны, а также, если отнять от прямых углов *GMO* и *CMm* один и тот же угол *GMm*, то остающиеся углы *OMm* и *GMC* будут равны.



Черт. 111.

Поэтому

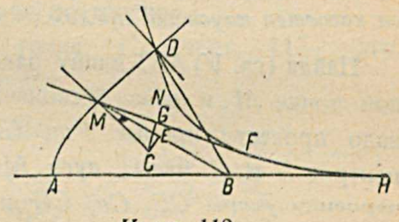
$$Rm . Om :: CE . CG :: m . n.$$

А так как *Rm* есть диференциал *BM*, а *Om* — диференциал *LM*, то (*§ 96*) *BM* — *BA*, сумма всех диференциалов *Rm* на отрезке кривой *AM*, отно-

сится к ML или $AH - MF - FH$, сумме всех диференциалов Om на том же отрезке AM, как m к n. Следовательно, отрезок

$$FH = AH - MF + \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM.$$

Могут представиться различные случаи в зависимости от того, будет ли падающий луч BA больше или меньше BM и будет ли преломленный луч AH обвертывать или развертывать отрезок [каустики] HF. Но всегда можно доказать, как это уже сделано, что разность падающих лучей относится к разности преломленных лучей (если прибавить к одному из них отрезок каустики, который он развертывает до своего совпадения с другим), как m к n. Например (черт. 112):



Черт. 112.

$$BA - BM . AH - MF - FH : : m . n,$$

откуда

$$FH = AH - MF + \frac{n}{m} BM - \frac{n}{m} BA.$$

Если из центра B (черт. 111) описать дугу круга AP, то, очевидно, что PM будет разностью падающих лучей BM и BA. Если же предположить, что светящаяся точка B бесконечно удаляется от кривой AMD, то падающие лучи BA и BM становятся параллельными и дуга AP обращается в прямую, перпендикулярную к этим лучам.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

Общая задача.

133. Даны *природа кривой* AMD (черт. 111), *светящаяся точка* B *и падающий луч* BM. *Найти на заданном по положению преломленном луче* MF *точку* F, *в которой он касается каустики преломления.*

Найдя (гл. *V*) MC длину радиуса развертки в данной точке M и взяв бесконечно малую дугу Mm, надо провести прямые Bm, Cm, Fm, описать из центров B и F малые дуги MR и MO и опустить перпендикуляры CE, Ce, CG и Cg на падающие и преломленные лучи. Обозначив данные: BM через y, ME через a, MG через b и малую дугу MR через dx, получим из подобия треугольников MEC и MRm, MGC и MOm, BMR и BQe, что

$$ME(a).MG(b)::MR(dx).MO=\frac{b\,dx}{a}.$$

Далее,

$$BM(y)\cdot BQ \text{ или } BE(y+a)::MR(dx)\cdot Qe=\frac{a\,dx+y\,dx}{y}.$$

По свойствам преломления

$$Ce.Cg::CE.CG::m.n,$$

и, следовательно,

$$m\cdot n::Ce-CE \text{ или } Qe\left(\frac{a\,dx+y\,dx}{y}\right).C_g-CG \text{ или } Sg=$$

$$=\frac{an\,dx+ny\,dx}{my}.$$

Кроме того, из подобных прямоугольных треугольников FMO и FSg получается:

$$MO - Sg\left(\frac{bmy\,dx - any\,dx - aan\,dx}{amy}\right) . MO\left(\frac{b\,dx}{a}\right) : :$$

$$: : MS \quad \text{или} \quad MG\,(b) \cdot MF = \frac{bbmy}{bmy - any - aan} .$$

Отсюда вытекает такое построение.

Построим при точке C (черт. 113) угол $ECH = GCM$ и возьмем $MK = \frac{aa}{y}$ на прямой MB. Я утверждаю, что если взять $HK . HE : : MG . MF$, то точка F окажется на каустике преломления.

Черт. 113.

Действительно, из подобия треугольников CGM и CEH следует:

$$CG . CE : : n . m : : MG\,(b) . EH = \frac{bm}{n} .$$

Отсюда

$$HE - ME \quad \text{или} \quad HM = \frac{bm - an}{n} ,$$

$$HM - MK \quad \text{или} \quad HK = \frac{bmy - any - aan}{ny} ;$$

следовательно,

$$HK\left(\frac{bmy - any - aan}{ny}\right) . HE\left(\frac{bm}{n}\right) : : MG\,(b) . MF =$$

$$= \frac{bbmy}{bmy - any - aan} .$$

Очевидно, что если значение HK отрицательно, то MF будет тоже отрицательно; это значит, что,

когда точка H находится между точками K и E, точка M попадает между точками G и F.

Если бы светящаяся точка B (черт. 111, 113) оказалась со стороны точки E, или (что то же самое) кривая AMD была бы вогнута со стороны светящейся точки B, то y стал бы отрицательным из положительного, каким он был до сих пор, и, следовательно, было бы:

$$MF = \frac{-bbmy}{-bmy + any - aan} \quad \text{или} \quad \frac{bbmy}{bmy - any + aan}.$$

Построение при этом остается прежним.

Если предположить, что y становится бесконечным, т. е. светящаяся точка B становится бесконечно удаленной от кривой AMD, то падающие лучи будут параллельны между собой и $MF = \frac{bbm}{bm - an}$, потому что член aan будет ничем по сравнению с двумя другими bmy и any; так как $MK\left(\frac{aa}{y}\right)$ тогда исчезнет, то надо взять лишь

$$HM.HE::MG.MF.$$

Следствие I.

134. Можно доказать, так же как и для каустик отражения (*§ 114, 115*), что при данном отношении m к n кривая AMD имеет единственную каустику преломления; эта каустика всегда геометрическая и спрямляемая, если данная кривая AMD — геометрическая.

Следствие II.

135. Если точки E и G оказываются по разные стороны перпендикуляра MC и $CE = CG$, то очевидно, что каустика преломления обратится в каустику отражения. В самом деле, в этом случае

$$MF\left(\frac{bbmy}{bmy - any \mp aan}\right) = \frac{ay}{2y \mp a},$$

так как $m = n$ и a из положительного становится отрицательным и равным b. Это вполне согласуется с тем, что доказано в предыдущей главе.

Если m бесконечно велико по сравнению с n, то ясно, что преломленный луч MF совпадает с перпендикуляром CM; таким образом каустика преломления оказывается разверткой. Действительно, в этом случае $MF = b$ и обращается в MC, т. е. точка F попадает в точку C, принадлежащую развертке.

Следствие III.

136. Если кривая AMD обращена выпуклостью к светящейся точке B и величина $MF\left(\frac{bbmy}{bmy - any - aan}\right)$ положительна, то, очевидно, точку F надо взять с той же стороны точки M, с которой находится точка G, как и предполагалось в выкладках. Наоборот, если MF отрицательна, точку F надо взять с противоположной стороны точки G. Так же обстоит дело и тогда, когда кривая AMD обращена вогнутостью к точке B, но следует заметить, что тогда

$$MF = \frac{bbmy}{bmy - any + aan}.$$

Отсюда получается, что бесконечно близкие преломленные лучи сходятся при положительном значении MF в первом случае и при отрицательном — во втором; наоборот, они расходятся при отрицательном значении MF в первом случае и при положительном во втором. Установив это, получаем:

1° Если кривая AMD обращена выпуклостью к светящейся точке B, и m меньше n, или если она обращена вогнутостью, и m больше n, то бесконечно близкие преломленные лучи всегда расходятся.

2° Если кривая AMD обращена выпуклостью к светящейся точке B, и m больше n, или если она обращена вогнутостью, и m меньше n, то бесконечно близкие преломленные лучи сходятся, когда $MK\left(\frac{aa}{y}\right)$ меньше $MH\left(\frac{bm}{n}-a \text{ или } a-\frac{bm}{n}\right)$, расходятся, когда больше, и параллельны, когда они равны. А так как, когда падающие лучи параллельны, $MK=0$, то в этом случае бесконечно близкие преломленные лучи всегда сходятся.

Следствие IV.

137. Если падающий луч BM касается кривой AMD в точке M, то $ME\,(a)=0$, и следовательно, $MF=b$. Из этого видно, что точка F совпадает тогда с точкой G.

Если падающий луч BM перпендикулярен к кривой AMD, прямые $ME\,(a)$ и $MG\,(b)$ будут каждая

равны радиусу развертки CM, так как они с ним совпадут. Значит, $MF = \frac{bmy}{my - ny \mp bn}$, что обращается в $\frac{bm}{m-n}$, когда падающие лучи параллельны между собой.

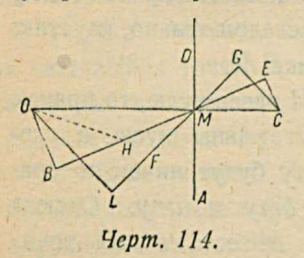
Если предломленный луч MF касается кривой AMD в точке M, то $MG(b) = 0$, и следовательно, каустика касается данной кривой в точке M.

Если радиус развертки CM равен нулю, то прямые $ME(a)$ и $MG(b)$ тоже будут равны нулю, и следовательно, члены aan и $bbmy$ будут ничем по сравнению с другими членами bmy и any. Отсюда следует, что $MF = 0$ и что M есть общая точка каустики и данной кривой.

Если радиус развертки CM бесконечно велик, прямые отрезки ME (a) и $MG(b)$ тоже бесконечно велики и, следовательно, члены bmy и any суть ничто по сравнению с другими aan и $bbmy$, так что $MF = \frac{bbmy}{\mp aan}$. А так как это величина отрицательная, если предположить, что точки F и B оказываются по разные стороны линии AMD (§ 133), и, наоборот, положительная, если эти точки оказываются по одну сторону линии AMD, то (§ 136) точку F следует взять с той же стороны, что и B, т. е. бесконечно близкие преломленные лучи расходятся. Очевидно, что при этом малая дуга Mm обращается в прямую линию и предыдущее построение не годится. Его можно заменить следующим,

которое служит для определения точек каустик преломления, когда AMD — прямая линия.

Проведя BO (черт. 114) — перпендикуляр к падающему лучу BM, пересекающий прямую MC, перпендикулярную AD в точке O, опускаем перпендикуляр OL на преломленный луч MG. Угол BOH берется равным углу LOM и $BM \,.\, BH :: ML \,.\, MF$. Я утверждаю, что точка F окажется на каустике преломления.



Черт. 114.

В самом деле, прямоугольные треугольники MEC и MBO, MGC и MLO будут подобны между собой при всякой величине CM. Поэтому при CM бесконечно большом опять-таки

$$ME(a) \,.\, MG(b) :: BM(y) \,.\, ML = \frac{by}{a}.$$

Из подобия треугольников OLM и OBH получается:

$$OL \,.\, OB\,(n \,.\, m) :: ML\left(\frac{by}{a}\right) \,.\, BH = \frac{bmy}{an}.$$

Отсюда видно, что

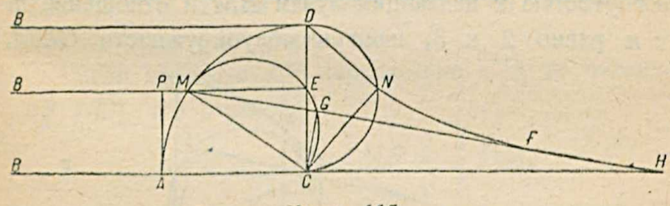
$$BM(y) \,.\, BH\left(\frac{bmy}{an}\right) :: ML\left(\frac{by}{a}\right) \,.\, MF\left(\frac{bbmy}{aan}\right).$$

Следствие V.

138. Очевидно, что если даны любые две из трех точек B, C и F, то легко найти третью.

Пример I.

139. Пусть кривая AMD (черт. 115) — четверть круга с центром в точке C. Пусть падающие лучи BA, BM и BD параллельны между собой и перпендикулярны к CD, а отношение m к n равно 3 к 2, т. е.



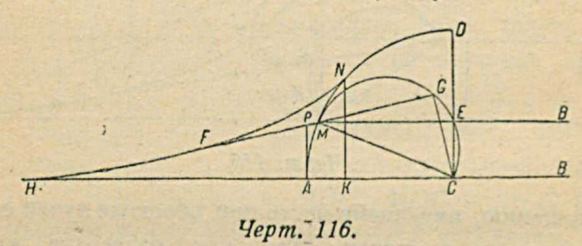
Черт. 115.

отношению, имеющему место при переходе лучей света из воздуха в стекло. Так как развертка круга AMD стягивается в одну точку, а именно его центр C, то, описав полуокружность MEC, имеющую диаметром радиус CM, и взяв хорду $CG = \frac{2}{3} CE$, получим линию MG — преломленный луч, на котором точка F определится, как указано выше в *§ 133*.

Для нахождения точки H, в которой падающий луч BA, перпендикулярный к AMD, касается каустики преломления, имеем (*§ 137*) $AH \left(\frac{bm}{m-n}\right) = 3b = 3CA$. Если построить полуокружность CND, имеющую диаметром радиус CD, и взять хорду $CN = \frac{2}{3} CD$, то очевидно (*§ 137*), что точка N окажется на каустике преломления, потому что падающий луч BD касается круга AMD в точке D.

Если провести AP параллельно CD, то (§ 132) ясно, что отрезок $FH = AH - MF - \frac{2}{3}PM$ и вся каустика $HFN = \frac{7}{3}CA - DN = \frac{7-\sqrt{5}}{3}CA$.

Если четверть круга AMD (черт. 116) обращена вогнутостью к падающим лучам BM и отношение m к n равно 2 к 3, надо в полуокружности CEM,



Черт. 116.

имеющей диаметром радиус CM, взять хорду $CG = \frac{3}{2}CE$ и провести преломленный луч MG, на котором точка F определится при помощи общего построения § 133.

Имеем (§ 137), что $AH\left(\frac{bm}{m-n}\right) = -2b$, т. е. AH расположена (§ 136) со стороны выпуклости четверти круга AMD и равна удвоенному радиусу AC. Если предположить, что CG или $\frac{3}{2}CE$ равна CM, то очевидно, что преломленный луч MF касается круга AMD в M, потому что при этом точка G совпадает с точкой M. Отсюда следует, что, если взять $CE = \frac{2}{3}CD$, то точка M попадет в точку N, в кото-

рой каустика HFN (§ *137*) касается четверти круга AMD. Но когда CE больше $\frac{2}{3}CD$, падающие лучи BM не могут уже более преломиться, т. е. перейти из стекла в воздух, так как невозможно, чтобы CG, перпендикуляр к преломленному лучу MG, был больше CM. Таким образом все лучи, которые упадут на часть ND, отразятся.

Если провести AP параллельно CD, то очевидно (§ *132*), что отрезок

$$FH = AH - MF + \frac{3}{2}PM,$$

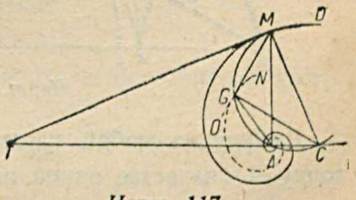
так что если провести NK параллельно CD, вся каустика

$$HFN = 2CA + \frac{3}{2}AK = \frac{7-\sqrt{5}}{2}CA.$$

Пример II.

140. Пусть кривая AMD (черт. 117) — логарифмическая спираль с центром в точке A, из которой исходят все падающие лучи AM.

Очевидно (§ *91*), что точка E совпадет с точкой A, т. е. $a = y$. Если в случае, когда кривая обращена



Черт. 117.

вогнутостью к светящейся точке, подставить в значение MF, т. е. $\frac{bbmy}{bmy - any + aan}$ (§ *133*), вместо a его

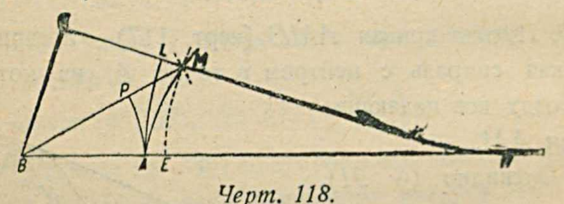
значение y, то получится $MF = b$, откуда видно, что точка F совпадает с точкой G.

Если провести прямую AG и касательную MT, то угол AGO, дополняющий до двух прямых угол AGM, будет равен углу AMT. Действительно, в круге, имеющем диаметром линию CM и проходящем через точки A и G, оба угла AGO и AMT измеряются половиной одной и той же дуги AM. Очевидно, что каустика AGN есть такая же логарифмическая спираль, как и данная AMD, и отличается от нее только расположением.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

Задача.

141. Даны *каустика* HF (черт. 118), *светящаяся точка* B *и отношение* m *к* n. *Найти бесконечное множество кривых, таких как* AM, *для которых* HF *является каустикой преломления.*



Черт. 118.

Выбрав на любой касательной HA произвольную точку A в качестве одной из точек кривой AM, опишем радиусом BA из центра B дугу круга AP и другим произвольным радиусом BM другую дугу и возьмем $AE = \frac{n}{m} PM$. При обертывании каустики

HF получается кривая EM, которая пересечет дугу круга, описанного радиусом BM, в точке M, находящейся на искомой кривой. Действительно (§ *132*), $PM.AE$ или $ML :: m.n$.

Другое решение.

142. Надо найти на произвольной касательной FM, отличной от HA, точку M, для которой

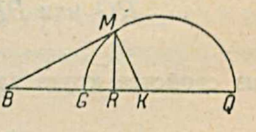
$$HF + FM + \frac{n}{m} BM = HA + \frac{n}{m} BA.$$

Поэтому, если взять

$$FK = \frac{n}{m} BA + AH - FH$$

и найти на FK точку M,

для которой $MK = \frac{n}{m} BM$, то она окажется (§ *132* искомой точкой. Это можно сделать, проведя такую кривую GM (черт. 119), что если соединить ее произвольную точку M с данными точками B и K прямыми MB и MK, то отношение последних всегда равно отношению m к n.



Черт. 119.

Значит вопрос сводится к определению природы этого геометрического места.

Пусть для этого проведена MR перпендикулярно BK, BK — данная — обозначена через a, а неопределенные: BR через x, RM через y. Прямоугольные треугольники BRM и KRM дают:

$$BM = \sqrt{xx + yy} \text{ и } KM = \sqrt{aa - 2ax + xx + yy},$$

так что для выполнения условий задачи получается:

$$\sqrt{xx+yy} . \sqrt{aa-2ax+xx+yy} :: m . n.$$

Отсюда

$$yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx,$$

т. е. геометрическое место есть круг, который можно построить следующим образом.

Пусть $BG = \frac{am}{m+n}$, а $BQ = \frac{am}{m-n}$ и на диаметре GQ построена полуокружность GMQ. Я утверждаю, что она будет искомой кривой. Действительно, при

$$QR \text{ или } BQ - BR = \frac{am}{m-n} - x$$

и

$$RG \text{ или } BR - BG = x - \frac{am}{m+n},$$

из свойства круга следует, что

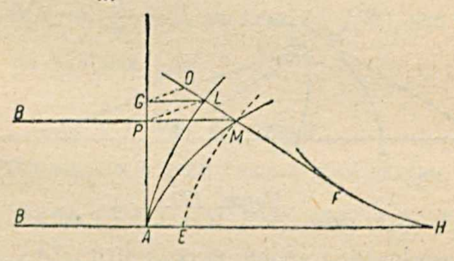
$$QR \times RG = \overline{RM}^2,$$

или, в аналитических обозначениях,

$$yy = \frac{2ammx - aamm}{mm - nn} - xx.$$

Если падающие лучи BA и BM (черт. 120) параллельны заданной по положению прямой, первое решение всегда сохраняет силу, но второе оказывается бесполезным и его можно заменить следующим.

Берем $FL = AH - HF$ и, проведя LG параллельно AB и перпендикулярно AP, возьмем $LO = \frac{n}{m} LG$ и проведем LP параллельно GO, а PM параллельно GL. Очевидно (§ *132*), что точка M будет искомой точкой, так как из $LO = \frac{n}{m} LG$ следует $ML = \frac{n}{m} PM$.



Черт. 120.

Если каустика преломления FH стягивается в точку, кривые AM становятся овалами Декарта, столь нашумевшими среди геометров [121]).

Следствие I.

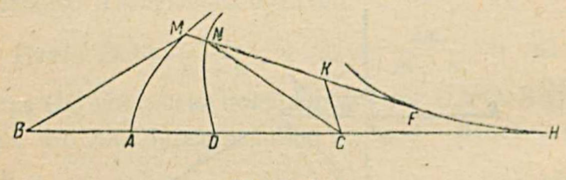
143. Можно доказать, как и для каустик отражения (§ *130*), что кривые AM могут быть различной природы и что они будут геометрическими только тогда, когда является геометрической и спрямляемой каустика преломления HF.

Следствие II.

144. Даны кривая AM (черт. 121), светящаяся точка B и отношение m к n. Найти бесконечное множество

таких линий DN, чтобы преломленные лучи MN, преломившись при встрече с ними вторично, сошлись в данной точке C.

Если предположить, что кривая HF есть каустика преломления для данной кривой AM, образованная светящейся точкой B, то очевидно, что эта же линия HF должна быть каустикой преломления искомой



Черт. 121.

кривой DN, имеющей в качестве светящейся точки данную точку C. Поэтому (*§ 132*)

$$\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MF + FH$$

и

$$NF + FH - \frac{n}{m} NC = HD - \frac{n}{m} DC,$$

и, следовательно,

$$\frac{n}{m} BA + AH = \frac{n}{m} BM + MN + HD - \frac{n}{m} DC + \frac{n}{m} NC;$$

переставляя обычным образом члены, получаем:

$$\frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM + \frac{n}{m} DC + AD = MN + \frac{n}{m} NC.$$

Это дает такое построение.

Выбрав на любом преломленном луче AH произвольную точку D в качестве одной из точек искомой кривой DN, возьмем на любом другом преломленном луче MF отрезок:

$$MK = \frac{n}{m} BA - \frac{n}{m} BM + \frac{n}{m} DC + AD;$$

если найти, как и выше (*§ 142*), точку N, для которой $NK = \frac{n}{m} NC$, то ясно (*§ 132*), что точка N окажется на кривой DN.

Общее следствие,

ОТНОСЯЩЕЕСЯ К ТРЕМ ПРЕДЫДУЩИМ ГЛАВАМ.

145. Очевидно (*§ 80*, *85*, *107*, *108*, *114*, *115*, *128*, *129*, *134*, *143*), что кривая имеет единственную развертку и при данной светящейся точке и данном отношении синусов единственную каустику отражения и единственную каустику преломления. Все они всегда оказываются геометрическими и спрямляемыми, если эта кривая геометрическая. Напротив, одна и та же линия может быть общей разверткой или, при данном отношении синусов и данной светящейся точке, каустикой отражения или преломления для бесконечного множества весьма различных линий, являющихся геометрическими только тогда, когда эта кривая геометрическая и спрямляемая.

ГЛАВА VIII

ПРИМЕНЕНИЕ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТОЧЕК КРИВЫХ, КАСАЮЩИХСЯ БЕСКОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ДАННЫХ ПО ПОЛОЖЕНИЮ ПРЯМЫХ ИЛИ КРИВЫХ ЛИНИЙ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I

Задача

146 ДАНА *некоторая линия* AMB (черт. 122), *имеющая осью прямую* AP, *и проведено бесконечное множество парабол* AMC, AmC, *которые все проходят через точку* A *и имеют осями ординаты* PM, pm. *Требуется найти кривую, касающуюся всех этих парабол*[122]).

Очевидно, что точка касания каждой параболы AMC есть C — точка ее пересечения с бесконечно близкой параболой AmC. Проведем CK параллельно MP и обозначим данные: AP через x, PM через y, а неизвестные: AK через u, KC через z.

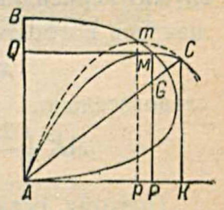
Из свойства параболы мы получим, что

$$\overline{AP}^2 (xx) \,.\, \overline{PK}^2 (uu - 2ux + xx) ::$$
$$:: MP(y) \,.\, MP - CK(y - z),$$

что дает:

$$zxx = 2uxy - uuy,$$

общее уравнение всех парабол, таких, как AMC. Далее я замечаю, что неизвестные $AK(u)$ и $KC(z)$ остаются неизменными, в то время как данные $AP(x)$ и $PM(y)$ переходят в Ap и pm, и что $KC(z)$ остается без изменения, только когда C есть точка пересечения, так как иначе прямая KC пересечет обе параболы AMC и AmC в двух различных точках и будет, следовательно, иметь два значения, соответствующих одному значению AK. Поэтому, обращаясь с u и z, как с постоянными, и продиференцировав только что найденное уравнение, можно определить точку C как точку пересечения. Значит,



Черт. 122.

$$2zx\,dx = 2ux\,dy + 2uy\,dx - uu\,dy,$$

откуда неизвестная

$$AK(u) = \frac{2xx\,dy - 2yx\,dx}{x\,dy - 2y\,dx},$$

если подставить вместо z его значение $\frac{2uxy - uuy}{xx}$. Так как природа кривой AMC известна, то можно выразить величину dy через dx и затем подставить ее в значение AK. Тогда эта неизвестная, наконец,

выразится через вполне известные члены, свободные от диференциалов. Что и было предложено.

Если вместо парабол AMC предложат другие, данные по положению, прямые или кривые линии, то задача будет решаться приблизительно таким же способом. Это и будет показано в следующих предложениях.

Пример.

147. Природа кривой AMB выражается уравнением $xx-4ay-4yy$; это полуэллипс, малой осью которого служит перпендикулярная к AP линия $AB=a$, а большая ось которого вдвое больше малой. Находим, что

$$x\,dx=2a\,dy-4y\,dy,$$

следовательно,

$$AK\left(\frac{2xx\,dy-2xy\,dx}{x\,dy-2y\,dx}\right)=\frac{ax}{y}=u.$$

Поэтому, если взять AK четвертой пропорциональной к MP, PA и AB и провести KC перпендикулярно AK, то она пересечет параболу AMC в искомой точке C.—Чтобы узнать природу кривой, касающейся всех парабол или проходящей через все найденные таким образом точки C, надо найти уравнение, выражающее соотношение между $AK\,(u)$ и $KC\,(z)$. Это достигается таким образом. Подставив вместо u его значение $\frac{ax}{y}$ в $zxx=2uxy-uuy$, получаем:

$$y=\frac{aa}{2a-z};$$

следовательно,

$$x \text{ или } \frac{uy}{a}=\frac{au}{2a-z}.$$

Если подставить эти значения вместо x и y в

$$xx = 4ay - 4yy,$$

то получится уравнение:

$$uu = 4aa - 4az,$$

в которое x и y более не входят и которое выражает связь между AK и KC. Отсюда видно, что искомая кривая есть парабола, имеющая осью линию BA, вершиной точку B и фокусом точку A; параметр ее, следовательно, равен учетверенному AB.

Мы нашли, что

$$y = \frac{aa}{2a - z},$$

откуда

$$KC\,(z) = \frac{2ay - aa}{y}.$$

Так как эта величина положительна, если $2y$ больше a, отрицательна — если меньше, и равна нулю при их равенстве, то точка C находится над AP в первом случае, как и предполагалось в выкладках, под AP во втором случае, и наконец, на AP — в третьем.

Если провести прямую AC, пересекающую MP в G, то я утверждаю, что $MG = BQ$ и точка G есть фокус параболы AMC. Действительно:

$$1^\circ \quad AK\left(\frac{ax}{y}\right) . KC\left(\frac{2ay - aa}{y}\right) :: AP(x) . PG = 2y - a,$$

и следовательно,

$$MG = a - y = BQ.$$

2° Если подставить вместо xx его значение $4ay - 4yy$, то параметр параболы AMC будет равен $4a - 4y$, следовательно, $MG\,(a - y)$ есть четвертая часть этого параметра, а отсюда видно, что G есть фокус параболы и угол BAC делится пополам касательной в точке A.

Из того, что параметр параболы AMC равен учетверенному BQ, следует, что, когда точка A совпадает с вершиной M, параметр равен учетверенному AB и таким образом парабола с вершиной в точке A асимптотична параболе, проходящей через все точки C.

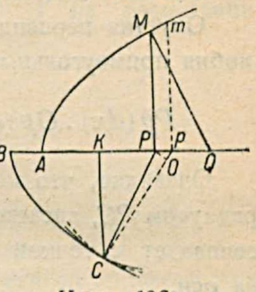
Так как парабола BC касается всех парабол вроде AMC, то очевидно, что точки пересечения этих парабол с определенной линией AC будут лежать ближе к точке A, чем точка C. В баллистике доказывается (если предположить AK горизонтальной), что все параболы вроде AMC указывают пути, которые описывают в воздухе снаряды, с одинаковой силой и под всевозможными наклонами выбрасываемые из мортиры, помещенной в точке A. Значит, если провести прямую, делящую пополам угол BAC, она укажет направление, которое нужно придать мортире, чтобы выброшенный ею снаряд попал на заданной по положению плоскости AC в возможно более удаленную от мортиры точку C.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

ЗАДАЧА.

148. Пусть *дана некоторая кривая* AM (черт. 123) *с осью* AP. *Найти другую кривую* BC, *произвольный перпендикуляр к которой* PC *всегда равен ординате* PM.

Если предположить, что из центров P и p описано бесконечное множество кругов радиусами PC и pC, равными PM и pm, то очевидно, что искомая кривая BC должна касаться всех этих кругов и что C, точка прикосновения каждого круга, есть точка его пересечения с другим бесконечно близким кругом. Установив это, проведем CK перпендикулярно AP и обозначим данные и переменные величины: AP через x, PM или PC через y, а неизвестные и постоянные: AK через u, KC через z. Из свойства круга мы получим:



Черт. 123.

$$\overline{PC}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{KC}^2,$$

т. е., аналитически,

$$yy = xx - 2ux + uu + zz.$$

Это — общее уравнение всех таких кругов; диференциал его есть:

$$2y\,dy = 2x\,dx - 2u\,dx,$$

откуда

$$PK(x-u) = \frac{y\,dy}{dx},$$

что дает следующее общее построение. Проведем MQ перпендикулярно кривой AM и, взяв $PK = PQ$, проведем KC параллельно PM. Я утверждаю, что она пересечет круг, описанный из центра P радиусом

$PC = PM$, в точке C, в которой он касается искомой кривой BC. Это очевидно, так как $PQ = \frac{y\,dy}{dx}$.

Значение PK можно найти еще иначе.

Опустив перпендикуляр PO на Cp, получим из подобия прямоугольных треугольников pOP и PKC, что

$$Pp\,(dx)\,.\,Op\,(dy) :: PC\,(y)\,.\,PK = \frac{y\,dy}{dx}.$$

Очевидно, что когда $PQ = PM$, круг, описанный радиусом PC, касается KC в точке K, так что точка C совпадает с точкой K и, следовательно, оказывается на оси.

Когда же PQ больше PM, круг, описанный радиусом PC, не сможет коснуться кривой BC, потому что не будет иметь ни одной общей точки с прямой KC.

Пример.

149. Пусть данная кривая AM (черт. 123) — парабола, уравнение которой $ax = yy$. Здесь PQ или $PK\,(x - u) = \frac{1}{2}a$; следовательно,

$$x = \frac{1}{2}a + u$$

и

$$yy = \frac{1}{4}aa + zz,$$

что получается из прямоугольного треугольника PKC. При подстановке этих значений в $ax = yy$ получается уравнение:

$$\frac{1}{2}aa + au = \frac{1}{4}aa + zz \quad \text{или} \quad \frac{1}{4}aa + au = zz,$$

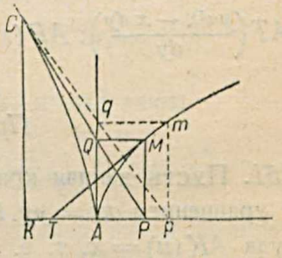
которое и выражает природу кривой BC. Очевидно, что эта кривая такая же парабола, как и AM, ибо они имеют одинаковый параметр a и вершина B отстоит от вершины A на расстоянии

$$BA = \frac{1}{4}a.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

Задача.

150. Пусть *дана некоторая кривая* AM (черт. 124), *которая имеет диаметром прямую* AP *и ординаты которой* PM *и* pm *параллельны данной по положению прямой* AQ. *Пусть проведены* MQ *и* mq *параллельно* AP *и прямые* PQC *и* pqC. *Требуется найти кривую* AC, *которой касаются все эти прямые, или, что то же, определить на каждой прямой* PQC *точку касания* C.



Черт. 124.

Представив себе другую касательную pqC, бесконечно близкую к PQC, проведем CK параллельно AQ и обозначим данные и переменные величины: AP через x, PM или AQ через y, а неизвестные и постоянные: AK через u, KC через z. Из подобия треугольников PAQ и PKC следует, что

$$AP(x) \,.\, AQ(y) :: PK(x+u) \,.\, KC(z) = y + \frac{uy}{x}.$$

Это общее уравнение всех прямых вроде KC,

Его диференциал есть:

$$dy + \frac{ux\,dy - uy\,dx}{xx} = 0,$$

откуда

$$AK(u) = \frac{xx\,dy}{y\,dx - x\,dy}.$$

Это дает следующее общее построение.

Проведем касательную MT и возьмем AK третьей пропорциональной к AT и AP. Я утверждаю, что если провести KC параллельно AQ, то она пересечет прямую PQC в искомой точке C.

Действительно,

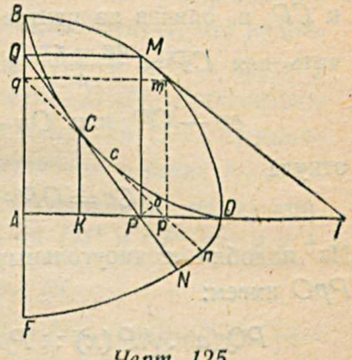
$$AT\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{dy}\right) . AP(x) :: AP(x) . AK = \frac{xx\,dy}{y\,dx - x\,dy}.$$

Пример I.

151. Пусть данная кривая AM (черт. 124) парабола с уравнением $ax = yy$. Мы имеем, что $AT = AP$, откуда $AK(u) = x$, т. е. точка K попадает в точку T. Если угодно получить уравнение, выражающее зависимость между $AK(u)$ и $KC(z)$, надо взять $KC(z) = 2y$, так как уже известно, что PK равно удвоенному AP. Значит при подстановке в $ax = yy$ вместо x и y их значений u и $\frac{1}{2}z$ получится $4au = zz$. Отсюда видно, что кривая AC есть парабола, имеющая вершину в точке A, а в качестве параметра — линию, равную учетверенному параметру параболы AM.

Пример II.

152. Пусть данная кривая AM (черт. 125) — четверть круга BMD, имеющего центром точку A и радиусом линию AB или AD, которую я назову a. Ясно, что PQ всегда равна радиусу AM или AB, т. е. везде одинакова, поэтому можно считать, что ее концы P и Q скользят вдоль сторон BA и AD прямого угла BAD. Мы получим, что $AK(u) = \frac{x^3}{aa}$, так как $AT = \frac{aa}{x}$; а параллельные KC и AQ дают:



Черт. 125.

$$AP(x) \,.\, PQ(a) :: AK\left(\frac{x^3}{aa}\right) . \, QC = \frac{xx}{a}.$$

Отсюда видно, что для нахождения точки касания C достаточно взять QC третьей пропорциональной к PQ и AP. Если угодно найти уравнение, выражающее природу кривой BCD, то оно получится в следующем виде [123]):

$$\begin{aligned} u^6 - 3aau^4 + \quad & 3a^4uu - a^6 \quad = 0 \\ + 3zz \quad + 21aazz \quad & + 3a^4zz \\ + \quad 3z^4 \quad & - 3aaz^4 \\ & + z^6 \end{aligned}$$

Следствие I.

153. Для того чтобы найти отношение отрезка DC кривой BCD к ее касательной CP, надо представить себе другую касательную cp, бесконечно близкую к CP, и, описав из центра C малую дугу PO, получить для $CP = \frac{aa - xx}{a}$ значение ее диференциала

$$cp - CP \text{ или } Op - Cc = -\frac{2x\,dx}{a},$$

откуда

$$Cc = OP + \frac{2x\,dx}{a}.$$

Из подобия прямоугольных треугольников QPA и PpO имеем:

$$PQ\,(a)\,.\,AP\,(x) :: Pp\,(dx)\,.\,OP = \frac{x\,dx}{a},$$

и, следовательно,

$$Cc = \frac{3x\,dx}{a} = DC - Dc.$$

Стало быть, где бы мы ни взяли точку C, будет иметь место:

$$DC - Dc\left(\frac{3x\,dx}{a}\right).\;CP - cp\left(\frac{2x\,dx}{a}\right) :: 3\,.\,2.$$

Отсюда следует, что сумма всех диференциалов $DC - Dc$, соответствующих прямой PD, т. е. (*§ 96*) отрезок DC кривой BCD, относится к сумме всех диференциалов $CP - cp$, соответствующих той же прямой PD, т. е. (*§ 96*) к касательной $CP :: 3\,.\,2$. Так же и вся кривая BCD относится к своей касательной $BA :: 3\,.\,2$.

Следствие II.

154. Если развернуть кривую BCD, начиная с точки D, получится кривая DNF, для которой $CN . CP :: 3 . 2$, так как CN всегда равняется отрезку DC кривой BCD. Отсюда следует, что подобные секторы CNn и CPO относятся один к другому $:: 9 . 4$, и значит пространство DCN, заключенное между кривыми DC и DN и прямой CN, касательной в точке C и перпендикулярной в точке N, относится к пространству DCP, заключенному между кривой DC и двумя касательными DP и CP, как 9 к 4.

Следствие III.

155. Центр тяжести сектора CNn должен быть расположен на дуге PO, так как $CP = \frac{2}{3} CN$. Далее, так как эта дуга бесконечно мала, то этот центр должен находиться на прямой AD; следовательно, центр тяжести пространств DCN и BDF, составленных из всех таких секторов, тоже должен находиться на прямой AD. Таким образом если по другую сторону BF описать фигуру, в точности сходную[124]) с BDF, то центр тяжести всей фигуры будет в точке A.

Следствие IV.

156. Из подобия прямоугольных треугольников PQA и pPO имеем, что

$$PQ(a) . AQ \text{ или } PM(\sqrt{aa - xx}) :: Pp(dx) . PO =$$

$$= \frac{dx\sqrt{aa - xx}}{a},$$

Далее, из подобных секторов CPO и CNn имеем:

$$CP \,.\, CN \text{ или } 2\,.\,3 :: PO\left(\frac{dx\sqrt{aa-xx}}{a}\right).\,Nn =$$

$$= \frac{3dx\sqrt{aa-xx}}{2a}.$$

Прямоугольник $MP \times Pp$, т. е. (§ 2) малая часть круга $MPpm = dx\sqrt{aa-xx}$. Поэтому

$$AB \times Nn = \frac{3}{2}\,MPpm;$$

значит, ND, отрезок кривой DNF, умноженный на радиус AB, в полтора раза[125]) больше сегмента круга DMP, и вся кривая DNF равна трем четвертям BMD, четвертой части окружности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

Задача.

157. Пусть *дана кривая* AM (черт. 126), *имеющая осью прямую* AP, *и имеется бесконечное множество перпендикуляров к этой кривой* MC *и* mC. *Требуется найти кривую, которой касаются все эти перпендикуляры, или, что то же, найти на каждом перпендикуляре* MC *точку касания* C.

Проведем ординату MP и, представив себе перпендикуляр mC, бесконечно близкий к MC, проведем через точку их пересечения C прямую CK, перпендикулярную оси, и прямую CE, параллельную ей. Обозначая затем данные и переменные величины;

AP через x, MP через y, а неизвестные и постоянные: AK через u, KC через z, получим:

$$PQ = \frac{y\,dy}{dx},$$

$$PK \text{ или } CE = u - x,\quad ME = y + z;$$

далее из подобия прямоугольных треугольников MPQ и MEC найдем, что

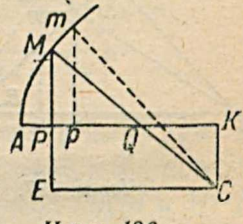
$$MP(y) \,.\, PQ\left(\frac{y\,dy}{dx}\right) :: ME(y+z) \,.\, EC(u-x) = \\ = \frac{y\,dy + z\,dy}{dx}.$$

Это — общее уравнение всех таких перпендикуляров, как MC; его диференциал (если полагать dx постоянным) дает:

$$-dx = \frac{y\,ddy + dy^2 + z\,ddy}{dx},$$

откуда

$$ME(z+y) = \frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}.$$



Черт. 126.

Зная природу кривой AM, можно выразить значения dy^2 и ddy через dx^2 и, подставив их в $\frac{dx^2 + dy^2}{-ddy}$, получить для ME вполне определенное выражение, свободное от диференциалов. Что и было предложено.

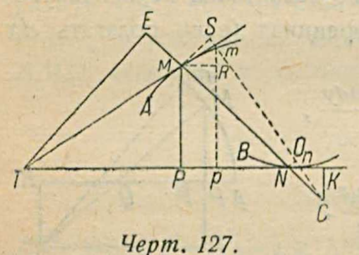
Очевидно, что кривая, проходящая через все точки C, есть развертка кривой AM, и так как она специально рассматривалась в главе пятой, то было бы бесполезно приводить здесь новые примеры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.

Задача.

158. Даны *две некоторые линии* AM *и* BN (черт. 127) *и прямая* MN, *все время остающаяся неизменной. Предполагая, что* M *и* N, *концы этой линии, непрерывно скользят вдоль двух других, найти кривую, которой она постоянно касается в этом движении.*

Проведя касательные MT и NT, представим себе другую прямую mn, бесконечно близкую к MN и пересекающую ее поэтому в точке C, где она касается кривой, точки которой надо определить. Очевидно, что концы прямой MN при переходе ее в mn пробегают по линиям AM и BN маленькие отрезки Mm и Nn, которые вследствие своей малости принадлежат касательным TM и TN. Таким образом можно считать, что линия MN при переходе в бесконечно близкое положение mn скользила вдоль данных по положению прямых TM, TN.



Черт. 127.

После этого опускаем на NT перпендикуляры MP и CK и обозначаем данные и переменные величины: TP через x, PM через y, неизвестные и постоянные: TK через u, KC через z и остающуюся всегда

неизменной данную MN через a. Прямоугольный треугольник MPN дает:

$$PN = \sqrt{aa - yy},$$

а из подобия треугольников NPM и NKC следует, что

$$PN(\sqrt{aa-yy}) \,.\, PM(y) :: $$
$$:: NK(u - x - \sqrt{aa-yy}) \,.\, KC(z) =$$
$$= \frac{uy - xy}{\sqrt{aa-yy}} - y.$$

Продиференцировав это, получим:

$$aau\,dy - aax\,dy - aay\,dx + y^3\,dx =$$
$$= \overline{aa\,dy - yy\,dy}\sqrt{aa-yy}.$$

Отсюда, положив для сокращения $\sqrt{aa-yy} = m$ и подставив вместо $y\,dx$ его значение $x\,dy$, которое получается из подобия треугольников mRM и MPT, мы найдем, что

$$PK(u-x) = \frac{m^3\,dy + mmy\,dx}{aa\,dy} = \frac{m^3 + mmx}{aa},$$

и, следовательно,

$$MC = \frac{mm + mx}{a}.$$

Это дает следующее построение.

Опустим перпендикуляр TE на MN и возьмем $MC = NE$; я утверждаю, что точка C будет искомой

точкой. Действительно, из подобия прямоугольных треугольников MNP и TNE имеем:

$$MN(a) \,.\, NP(m) :: $$
$$:: NT(m+x) \,.\, NE \text{ или } MC = \frac{mm+mx}{a}.$$

Другой способ.

Опустив перпендикуляр TE на MN и описав из центра C малые дуги MS и NO, обозначим данные: NE через r, ET через s, MN через a и неизвестную CM через t. Мы получим, что Sm или $On = dt$, а из подобия прямоугольных треугольников MET и mSM, NET и nON, CMS и CNO найдем, что

$$ME(r-a) \,.\, ET(s) :: mS(dt) \,.\, SM = \frac{s\,dt}{r-a};$$

и

$$NE(r) \,.\, ET(s) :: nO(dt) \,.\, ON = \frac{s\,dt}{r};$$

и

$$MS - NO\left(\frac{as\,dt}{rr-ar}\right) \,.\, MS\left(\frac{s\,dt}{r-a}\right) :: MN(a) \,.\, MC(t) = r.$$

Это дает такое же построение, как и раньше.

Если предположить, что линии AM и BN суть две взаимно перпендикулярные прямые, то очевидно, что искомая кривая будет такая же, как и в § 152.

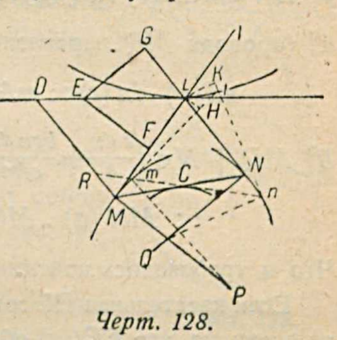
ПРЕДЛОЖЕНИЕ VI.

Задача.

159. Пусть *даны три некоторых линии* L, M *и* N (черт. 128), *и из точек* L *и* l *линии* L *проведены по две касательных* LM *и* LN, lm *и* ln *к обеим кривым*

M *и* N. *Требуется найти четвертую кривую* C, *которой касаются все прямые* MN *и* mn, *соединяющие точки касания кривых* M *и* N.

Проведя касательную LE и опустив из произвольной ее точки E перпендикуляры EF и EG на две другие касательные ML и NL, представим себе бесконечно близкую к точке L точку l и проведем малые прямые LH и LK, перпендикулярные к ml и nl, а также перпендикуляры MP, mP, NQ и nQ к касательным ML, ml, NL, nl. Эти перпендикуляры взаимно пересекаются в точках P и Q. При этом образуются подобные прямоугольные треугольники EFL и LHl, EGL и LKl, а также треугольники LMH и MPm, LnK и NQn, которые имеют прямые углы при H и m, K и N и которые подобны между собой, потому что углы LMH и MPm при их прибавлении к одному и тому же углу PMm дают прямой угол. Так же можно доказать, что равны между собой углы LnK и NQn.



Черт. 128.

Установив это, обозначим Mm, малую сторону многоугольника, образующего кривую M, через du, а данные: EF через m, EG через n, MN или mn через a, ML или ml через b, NL или nl через c, MP или mP через f, NQ или nQ через g (я прини-

маю здесь прямые MP и NQ за данные потому, что их всегда можно найти, ибо природа кривых M и N по предположению известна; см. § 78). Получается:

1° $MP(f) \,.\, ML\,(b) :: Mm\,(du) \,.\, LH = \frac{b\,du}{f}$,

2° $EF(m) \,.\, EG(n) :: LH\left(\frac{bdu}{f}\right) . LK = \frac{bn\,du}{mf}$;

3° LN или $Ln\,(c) \,.\, nQ\,(g) :: LK\left(\frac{bn\,du}{mf}\right) . nN = \frac{bgn\,du}{cfm}$;

4° (проводя MR параллельно NL или nl)

$$ml(b) \cdot ln\,(c) :: mM\,(du) \cdot MR = \frac{c\,du}{b};$$

5° $MR + Nn\left(\frac{c\,du}{b} + \frac{bgn\,du}{cfm}\right) . MR\left(\frac{c\,du}{b}\right) ::$

$$:: MN\,(a) \,.\, MC = \frac{accfm}{ccfm + bbgn}.$$

Что и требовалось найти.

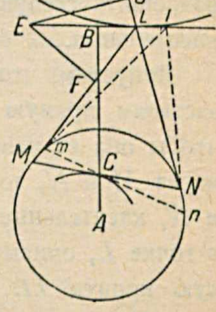
Если касательная EL совпадает с касательной ML, то очевидно, что $EF(m)$ обращается в ничто или нуль, следовательно, искомая точка C совпадает с точкой M. Точно так же, если касательная EL совпадает с касательной LN, то $EG(n)$ обращается в нуль и, следовательно, $MC = a$, из чего видно, что искомая точка C совпадает с точкой N. Наконец в случае, когда касательная EL попадает внутрь угла GLI, $EG(n)$ оказывается отрицательным, что дает:

$$MC = \frac{accfm}{ccfm - bbgn};$$

искомая точка C попадает тогда не между точками M и N, а лежит с какой-либо стороны от них.

Пример I.

160. Предположим, что кривые M и N (черт. 129) составляют вместе круг. Ясно, что в таком случае $b=c$ и $f=g$ и значит $MC=\frac{am}{m+n}$, откуда видно, что для нахождения искомой точки C достаточно разделить прямую MN в данном отношении m к n, т. е. так, чтобы $MC \cdot NC :: m \cdot n$.



Черт. 129.

Пример II.

161. Предположим, что кривые M и N представляют собою некоторое коническое сечение. Общее построение можно заменить тогда другим, значительно более простым, если принять во внимание одно свойство конических сечений, которое доказывается в книгах, посвященных этому предмету. Именно, если провести к коническому сечению из точек L и l прямой EL по две касательных LM и LN, lm и ln, то все прямые MN, mn, соединяющие точки касания, пересекаются в одной и той же точке C, через которую проходит диаметр AC, ординаты которого параллельны прямой EL [126]). Отсюда следует, что для получения точки C достаточно провести диаметр, ординаты которого параллельны касательной EL.

Очевидно, что в круге этот диаметр перпендикулярен касательной EL, т. е. перпендикуляр AB, опущенный из центра круга A на эту касательную, пересекает прямую MN в искомой точке C.

Замечание.

162. Посредством этой задачи (черт. 128) можно разрешить следующую задачу, относящуюся к методу касательных.

Допустим, что даны три кривых: C, M и N, и заставим прямую MN катиться по кривой C так, чтобы она ее непрерывно касалась. Проведем затем через M и N, точки ее пересечения с кривыми M и N, касательные ML и NL, которые пересекутся в точке L, описывающей при этом движении четвертую кривую Ll. Требуется при данной точке касания C и данных положениях прямых MN, ML и NL провести LE, касательную к этой кривой.

Очевидно, что эта задача просто обратная предыдущей. Здесь MC дано, а искомым является отношение EF к EG, которое определяет положение касательной EL. Поэтому, обозначая данное MC через h, получим:

$$\frac{accfm}{ccfm + bbgn} = h,$$

откуда

$$m = \frac{bbghn}{accf - ccfh};$$

следовательно, касательная LE должна быть расположена внутри данного угла MLG так, чтобы перпен-

дикуляры EF и EG, опущенные из любой ее точки E на стороны этого угла, находились между собой всегда в данном отношении $bbgh$ к $accf-ccfh$. А этого можно достигнуть, проведя MD параллельно NL и взяв его равным $\frac{b^3gh}{accf-ccfh}$.

Очевидно (§ *161*), что если обе кривых M и N (черт. 129) образуют вместе одно коническое сечение, то достаточно провести касательную LE, параллельную ординатам диаметра, проходящего через точку C.

ГЛАВА IX

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ, СВЯЗАННЫХ С ВЫШЕПРИВЕДЕННЫМИ МЕТОДАМИ

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I

Задача

163. ПУСТЬ *величина ординаты у кривой* AMD (черт. 130) (AP = x, PM = y, AB = a) *выражается дробью, числитель и знаменатель которой обращаются в нуль при* x = a, *т. е. когда точка* P *совпадает с данной точкой* B. *Спрашивается, какой должна быть при этом величина ординаты* BD.

Пусть имеются две кривых ANB и COB, общей осью которых является линия AB, причем ордината PN выражает числитель, а ордината PO — знаменатель общей дроби, подходящей для всех PM, так что

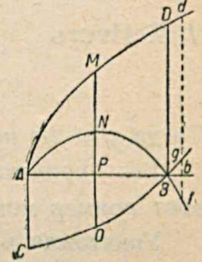
$$PM = \frac{AB \times PN}{PO}.$$

Очевидно, что обе эти кривые пересекутся в точке B,

так как, по предположению, и PN и PO обращаются в нуль, когда точка P совпадает с B. Если теперь представить себе ординату bd, бесконечно близкую к BD и пересекающую кривые ANB и COB в точках f и g, то получим:

$$bd = \frac{AB \times bf}{bg},$$

что не отличается (§ 2) от BD. Значит остается найти отношение bg к bf. Но очевидно, что когда абсцисса AP обращается в AB, то ординаты PN и PO обращаются в нуль, а когда AP обращается в Ab, ординаты обращаются в bf и bg. Отсюда следует, что эти ординаты bf и bg суть диференциалы ординат кривых ANB и COB в точках B и b. Следовательно, если взять диференциал числителя и разделить его на диференциал знаменателя, положив $x = a = Ab$ или AB, то мы получим искомое значение ординаты bd или BD. Что и требовалось найти [127]).



Черт. 130.

Пример I.

164. Пусть

$$y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{aax}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}.$$

Очевидно, что при $x = a$ и числитель и знаменатель этой дроби обращаются каждый в нуль,

Поэтому надо взять диференциал числителя

$$\frac{a^3 dx - 2x^3 dx}{\sqrt{2a^3x - x^4}} - \frac{aa\,dx}{3\sqrt[3]{axx}}$$

и разделить его на диференциал знаменателя

$$-\frac{3a\,dx}{4\sqrt[4]{a^3x}},$$

положив $x = a$, т.е. разделить $-\frac{4}{3}a\,dx$ на $-\frac{3}{4}dx$, что дает $\frac{16}{9}a$ для искомой величины BD.

Пример II.

165. Пусть

$$y = \frac{aa - ax}{a - \sqrt{ax}}.$$

Тогда $y = 2a$ при $x = a$.

Без применения диференциального исчисления этот пример можно решить таким образом.

Уничтожая иррациональность, получаем:

$$aaxx + 2aaxy - axyy - 2a^3x + a^4 + aayy - 2a^3y = 0,$$

что при делении на $x - a$ сводится к

$$aax - a^3 + 2aay - ayy = 0;$$

подставляя a вместо x, находим, как прежде,

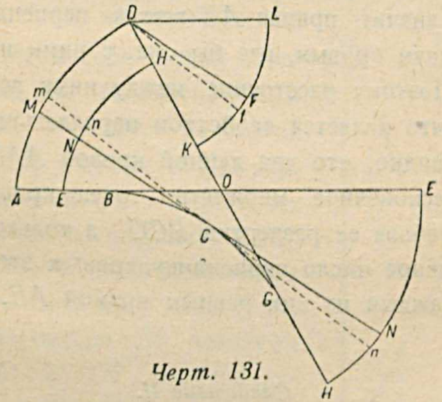
$$y = 2a.$$

Лемма I.

166. Пусть *имеется некоторая кривая* BCG (черт. 131), *имеющая в точке* B *касательную* AE, *на которой отмечены две произвольных фиксированных точки* A *и* E. *Если прямую* AE *заставить катиться по кривой так, чтобы она ее непрерывно касалась, то очевидно, что*

фиксированные точки A *и* E *опишут при этом движении две кривых* AMD *и* ENH. *Опишем произвольным радиусом из центра* D *дугу* KFL и *проведем* DL *параллельно* AB. DL *при этом образует с* DK (*которая по предположению совпадает с прямой* AE, *когда она касается кривой* BCG в G) *угол* KDL, *равный углу* AOD, *образуемому касательными* B *и* G.

Я утверждаю, что DK · KFL : : AE · AML ± ENH. *При этом имеет место* +, *когда точка касания все время остается между образующими точками, и* —, *когда она постоянно находится с какой-либо стороны от них*.



Черт. 131.

Действительно, если предположить, что прямая AE при качении по кривой BCG приходит в два бесконечно близких положения MCN и mCn, и провести радиусы DF и Df, параллельные CM и Cm, то очевидно, что секторы DFf, CMm и CNn будут подобны, и таким образом

$$DF \cdot Ff :: CM \cdot Mm :: CN \cdot Nn :: CM \pm CN$$

$$\text{или } AE \cdot Mm \pm Nn.$$

А так как это имеет место, где бы ни взять точку касания C, то радиус DK относится к дуге KFL, сумме всех малых дуг $Ff :: AE \cdot AMD \pm ENH$, сумме всех малых дуг $Mm \pm Nn$. Что и требовалось доказать [128]).

Следствие I.

167. Очевидно, что кривые AMD и ENH образованы развертыванием одной и той же кривой BCG и, значит, прямая AE всегда перпендикулярна к этим двум кривым, где бы она с ними ни пересекалась. Поэтому расстояние между ними всегда одинаково, что является свойством параллельных линий. Отсюда видно, что для данной кривой AMD можно найти бесконечное множество точек кривой ENH, не употребляя ее развертки BCG, а только проводя произвольное число перпендикуляров к этой кривой и беря каждый из них равным прямой AE.

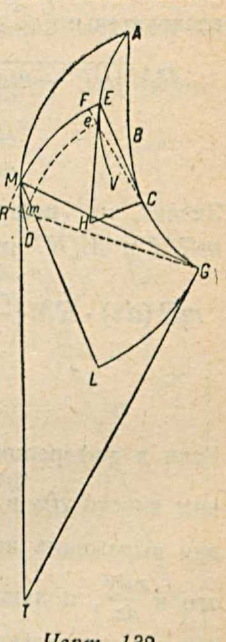
Следствие II.

168. Если обе половины BC и CG кривой BCG вполне конгруэнтны и если взять прямые BA и GH равными, то очевидно, что кривые AMD и ENH будут конгруэнтны и будут отличаться только расположением. Отсюда следует, что кривая AMD относится к дуге круга, $KFL :: \frac{1}{2} AE \cdot DK$, т. е. находится к ней в данном отношении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

Задача.

169. Пусть AEV *и* BCG (черт. 132) — *две некоторые кривые, и третья кривая* AMD *такова, что при развертывании кривой* BCG *в отрезок кривой* EM *зависимость между отрезками кривых* AE *и* EM *и радиусами развертки* EC *и* MG *выражается некоторым данным уравнением. Предлагается провести из данной точки* M, *принадлежащей кривой* AMD, *касательную* MT.



Черт. 132.

Представим себе другой отрезок кривой em, бесконечно близкий к EM, и радиусы развертки CeF и GmR и пусть: 1° CH перпендикулярна к CE и пересекает EH, касательную к кривой AEV, в точке H; 2° ML параллельна CE и пересекает дугу GL, описанную из центра M радиусом MG, в L; 3° GT перпендикулярна MG и пересекает искомую касательную MT в T.

Затем, обозначая данные: AE через x, EM через y, CE через u, GM через z, CH через s, EH через t, дугу GL через r, получим $Ee = dx$, Fe или $Rm = du = dz$. Далее, из подобия треугольников eFE и ECH следует, что

$$CE\,(u) \cdot CH\,(s) :: Fe\,(dz) \cdot FE = \frac{s\,dz}{u}$$

и

$$CE(u) \cdot EH(t) :: Fe(dz) \,.\, Ee(dx) = \frac{t\,dz}{u}.$$

Но согласно лемме (§ 166)

$$RF - me = \frac{r\,dz}{z},$$

следовательно,

$$RM\,(\overline{RF - me} + \overline{me - ME} + \overline{ME - MF}) =$$

$$= \frac{r\,dz}{z} + dy + \frac{s\,dz}{u}.$$

Значит, из подобия прямоугольных треугольников mRM и MGT имеем:

$$mR\,(dz) \cdot RM\left(\frac{r\,dz}{z} + dy + \frac{s\,dz}{u}\right) :: Mg\,(z) \cdot GT =$$

$$= r + \frac{sz}{u} + \frac{z\,dy}{dz}.$$

Если в диференциал данного уравнения мы подставим вместо du и dx их значения dz и $\frac{t\,dz}{u}$, то найдем выражение величины dy через dz, а подставив его в $\frac{z\,dy}{dz}$, получим для искомой подкасательной GT вполне определенное значение, свободное от диференциалов. Что и было предложено.

Если предположить, что кривая BCG стягивается в точку O (черт. 133), то очевидно, что отрезок кривой $ME\,(y)$ преобразуется в дугу круга, равную дуге $GL\,(r)$, а радиусы развертки $CE\,(u)$ и $GM\,(z)$

оказываются равными между собой, так что GT, которая в этом случае обращается в OT, окажется $= y + s + \frac{z\,dy}{dz}$.

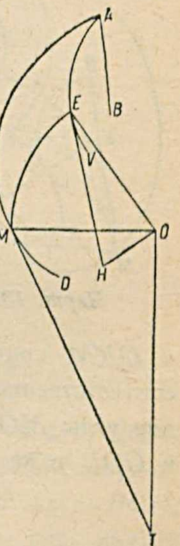
Пример.

170. Пусть $y = \frac{xz}{a}$. Диференцирование дает dy (черт. 133) $= \frac{z\,dx - x\,dz}{a}$ (берется (§ 8) $-x\,dz$ вместо $+x\,dz$, потому что, при возрастании x и y, z убывает) $=$ $= \frac{t\,dz - x\,dz}{a}$, если вместо dx подставить его значение $\frac{t\,dz}{z}$. Следовательно,

$$OT\left(y + s + \frac{z\,dy}{dz}\right) =$$

$$= y + s + \frac{tz - xz}{a} = \frac{as + tz}{a},$$

если вместо $\frac{xz}{a}$ подставить его значение y.



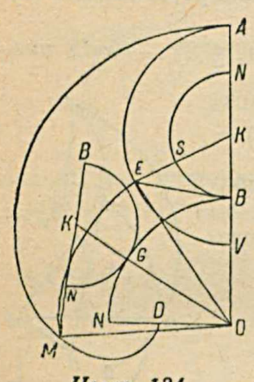
Черт. 133.

Замечание.

171. Если точка O оказывается на оси AB (черт. 134) и кривая AEV есть полукруг, то кривая AMD будет полуэпициклоидой, образованной качением полукруга BSN по равной ему дуге круга BGN, описанного из точки O. Образующая точка A оказывается вне, внутри или на окружности

подвижного полукруга BSN в зависимости от того, будет ли данное a больше, меньше или равно OV.

Чтобы доказать это и вместе с тем определить точку B, я предполагаю указанные условия, а именно, что кривая AMD есть полуэпициклоида, образованная качением полукруга BSN, с центром в точке K, центре полукруга AEV, по дуге BGN, описанной из центра O. Предполагая, что полукруг BSN останавливается в таком положении BGN, при котором образующая точка A попадает в точку M, я провожу через центры образующих кругов прямую OK, которая, следовательно, проходит через точку прикосновения G. Проводя KSE, я замечаю, что треугольники OKE и OKM конгруэнтны, потому что все их стороны соответственно равны. Отсюда следует: 1° что крайние углы MOK и EOK равны и значит углы MOE и GOB тоже равны, что дает:



Черт. 134.

$$GB \cdot ME :: OB \cdot OE;$$

2° что углы MKO и EKO также равны, так что измеряющие их дуги GN и BS тоже равны; это же можно сказать о GB и SN, их дополнениях до двух прямых, так как они принадлежат одинаковым кругам, а из образования эпициклоиды следует, что

дуга GB подвижного круга равна дуге GB неподвижного. Следовательно, я буду иметь, что

$$SN \cdot ME :: OB \cdot OE.$$

Обозначив затем данные: OV через b, KV или KA через c, неизвестную KB через u, я получу:

$$OB = b + c - u,$$

а из подобия секторов KEA и KSN найду, что

$$KE(c) \cdot KS(u) :: AE(x) \cdot SN = \frac{ux}{c}.$$

Следовательно,

$$OB(b + c - u) \cdot OE(z) :: SN\left(\frac{ux}{c}\right) \cdot EM(y) =$$

$$= \frac{uxz}{bc + cc - cu} = \frac{xz}{a}.$$

Отсюда

$$KB(u) = \frac{bc + cc}{a + c}.$$

Очевидно, что если взять $KB = \frac{bc + cc}{a + c}$ и описать из центров K и O полуокружность BSN и дугу BGN, то кривая AMD будет полуэпициклоидой, образованной качением полукруга BSN по дуге BGN; образующая точка ее A оказывается вне, внутри или на окружности этого круга в зависимости от того, будет ли $KV(c)$ больше, меньше или равно $KB\left(\frac{bc + cc}{a + c}\right)$, т. е. будет ли a больше, меньше или равно $OV(b)$.

Следствие I.

172. Очевидно, что

$$EM\,(y) \cdot AE\,(x) :: \\ :: KB \times OE\,(uz) \cdot OB \times KV\,(bc + cc - uc).$$

Если предположить, что OB становится бесконечной, то прямая OE тоже становится бесконечной и оказывается параллельной OB, так как нигде с ней не пересечется; концентрические дуги BGN и EM станут прямыми, параллельными между собой и перпендикулярными к OB и OE; и прямая EM будет относиться к дуге $AE :: KB \cdot KV$, так как бесконечные прямые OE и OB, отличающиеся одна от другой только на конечную величину, должны рассматриваться как равные.

Следствие II.

173. Из равенства углов MKO и EKO следует, что треугольники MKG и EKB будут конгруэнтны, и таким образом прямые MG и EB равны между собой. Отсюда видно (§ *43*), что, для того чтобы через данную точку эпициклоиды M провести перпендикуляр MG, достаточно описать из центра O дугу ME, а из центра M дугу круга радиусом EB. Эта дуга пересечет основание BGN в точке G, соединив которую с точкой M, получим искомый перпендикуляр.

Следствие III.

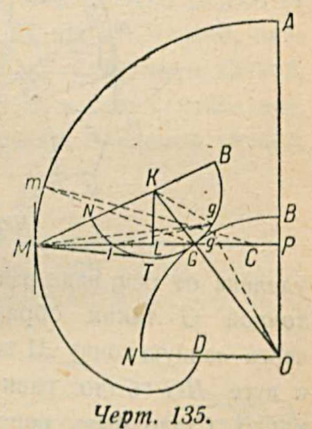
174. На окружности подвижного полукруга BGN дана точка G; если надо найти точку эпициклоиды M,

в которую попадает образующая точка A, когда данная точка G касается основания, достаточно взять дугу SN равной дуге BG и, проведя радиус KS, который пересекает окружность AEV в точке E, описать из центра O дугу EM, так как очевидно, что эта дуга пересечет эпициклоиду в искомой точке M.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

Задача.

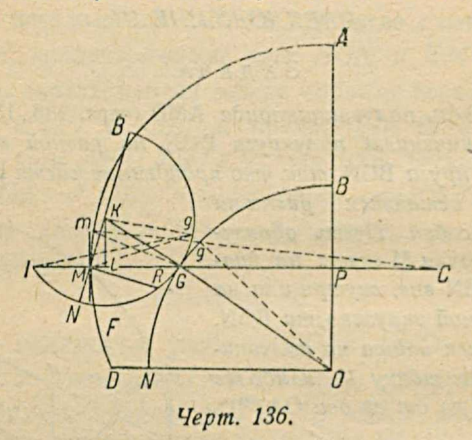
175. Пусть *полуэпициклоида* AMD (черт. 135, 136) *образована качением полукруга* BGN *по равной ему дуге другого круга* BGN, *так что пройденные части* BG *и* BG *всегда остаются равными между собой. Пусть образующая точка* M *взята на диаметре* BN *вне, внутри или на подвижной окружности* BGN. *Требуется найти на полуэпициклоиде точку* M, *наиболее удаленную от ее оси* OA [129]).



Черт. 135.

Предположим, что точка M есть искомая точка; ясно (*§ 47*), что касательная в M параллельна оси OA, так что MC, перпендикуляр к эпициклоиде, должен быть перпендикулярен и к оси, которую он пересекает в точке P. Если теперь провести OK через центры образующих кругов, то она пройдет через точку прикосновения G. Далее, проведя KL перпен-

дикулярно MG, мы образуем равные углы GKL и GOB; следовательно, дуга IG, вдвое большая дуги, измеряющей угол GKL, относится к дуге GB, измеряющей угол GOB, как диаметр BN к радиусу OB. Поэтому, для того чтобы определить на полуокружности BGN точку G, где она касается дуги, которая ей служит основанием, когда образующая точка M наиболее



Черт. 136.

удалена от оси, надо разделить полуокружность BGN точкой G таким образом, чтобы, при проведении через данную точку M хорды IG, отношение дуги IG к дуге BG было равно данному отношению BN к OB. Стало быть вопрос сводится к задаче обыкновенной геометрии, которая всегда может быть решена геометрическим путем, если данное отношение есть отношение двух чисел, и притом при помощи линий с уравнением более или менее высокого

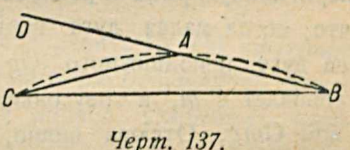
измерения в зависимости от большей или меньшей сложности отношения.

Если предположить, что радиус OB становится бесконечным, что имеет место, когда основание BGN обращается в прямую линию, то дуга IG будет бесконечно малой по сравнению с дугой GB. Отсюда видно, что в этом случае секущая MIG становится касательной MT, когда образующая точка M попадает *вне* подвижного круга, и что наиболее удаленная от оси точка не может существовать, когда точка M попадает *внутрь* его.

Когда точка M попадает на окружность в N, достаточно разделить полуокружность BGN точкой G в данном отношении BN к OB. Действительно, найденная таким образом точка G будет той точкой, в которой подвижной круг BGN касается основания, когда образующая точка совпадает с искомой точкой.

Лемма II.

176. Я утверждаю, *что во всяком треугольнике* BAC (черт. 137), *в котором углы* ABC, ACB *и* CAD, *дополняющий до двух прямых тупой угол* BAC, *бесконечно малы, эти углы относятся между собой, как противолежащие им стороны* AC, AB *и* BC.



Черт. 137.

Действительно, если около треугольника BAC описать круг, то дуги AC, AB, BAC, измеряющие углы, вдвое большие данных, будут беско-

нечно малы и, следовательно, не будут отличаться (§ 3) от своих хорд.

Если стороны AC, AB и BC треугольника BAC не бесконечно малы, а имеют конечную величину, то описанный круг должен быть бесконечно большим, так как дуги AC, AB и BAC, имеющие конечную величину и измеряющие бесконечно малые углы, должны быть бесконечно малы по сравнению с этим кругом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

Задача.

177. При *прежних условиях найти на каждом перпендикуляре* MG *точку* C *его прикосновения к развертке эпициклоиды* (черт. 135, 136).

Представив себе другой перпендикуляр mg, бесконечно близкий к MG и, следовательно, пересекающийся с ним в искомой точке C, проведем прямую Gm и, взяв на окружности подвижного круга малую дугу Gg, равную дуге Gg неподвижного круга, проведем прямые Mg, Ig, Kg, Og. Если рассматривать далее малые дуги Gg и Gg как малые прямые, перпендикулярные к радиусам Kg и Og, то очевидно, что, когда малая дуга подвижного круга Gg падет на дугу неподвижного Gg, образующая точка M совпадет с m, а треугольник GMg — с треугольником Gmg. Отсюда видно, что угол MGm равен углу $gGg = GKg + GOg$; действительно, при прибавлении к обеим сторонам [равенства] углов KGg и OGg получаются два прямых.

Обозначая теперь данные: OG через b, KG через a, GM или Gm через m, GI или Ig через n, находим:

1° (§ 176)

$$OG \,.\, KG :: GKg \,.\, GOg$$

и

$$OG\,(b) \,.\, OG + GK \text{ или } OK\,(b+a) ::$$

$$:: GKg \,.\, GKg + GOg \text{ или } MGm = \frac{a+b}{b}\,GKg;$$

2° (§ 176)

$$Ig \,.\, MI :: GMg \,.\, MgI$$

и

$$Ig \pm MI \text{ или } MG\,(m) \,.\, Ig(n) ::$$

$$:: GMg \pm MgI \text{ или } GIg \text{ или } \frac{1}{2}\,GKg \,.\, GMg$$

или $Gmg = \dfrac{n}{2m}\,GKg$;

3° (там же) угол MCm или $MGm - Gmg$

$$\left(\frac{a+b}{b} - \frac{n}{2m}\,GKg\right) \,.\, Gmg\left(\frac{n}{2m}\,GKg\right) :: Gm\,(m) \,.\, GC =$$

$$= \frac{bmn}{2am + 2bm - bn}.$$

Следовательно, искомый радиус развертки MC будет $= \dfrac{2amm + 2bmm}{2am + 2bm - bn}$.

Если предположить, что радиус $OG\,(b)$ неподвижного круга становится бесконечно большим, то окружность становится прямой линией; уничтожая члены $2amm$ и $2am$, так как они ничто по сравнению с другими: $2bmm$ и $2bm - bn$, мы получим, что

$$MC = \frac{2mm}{2m - n}.$$

Следствие I.

178. Из того, что угол $MGm = \frac{a+b}{b} GKg$ и что дуги различных кругов находятся между собой в отношении, составленном из радиусов и измеряемых ими углов, следует, что

$$Gg \,.\, Mm :: KG \times GKg \,.\, MG \times \frac{a+b}{b} GKg.$$

Следовательно,

$$KG \times Mm = \frac{a+b}{b} MG \times Gg$$

или (что то же самое)

$$KG \times Mm \,.\, MG \times Gg :: OK(a+b) \,.\, OG(b),$$

что представляет собою постоянное отношение. Отсюда видно, что величина отрезка AM полуэпициклоиды AMD зависит от суммы произведений, $MG \times Gg$ вдоль дуги GB; г. Паскаль доказывает это для циклоид, имеющих основанием прямые линии.

Г. Вариньон открыл это же свойство путем, совершенно отличным от приведенного.

Следствие II.

179. Когда образующая точка M (черт. 135) попадает вне окружности подвижного круга, то возможны только три следующих случая. Действительно, при проведении касательной MT, точка касания G может попасть: либо 1° на дугу TB, как и предполагалось в выкладках и на чертеже; тогда

$$MC\left(\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}\right)$$

всегда будет больше $MG(m)$; либо 2° в точку касания T; при этом $MC\left(\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}\right)=m$, так как IG (n) исчезает; либо 3° на дугу TN; тогда величина $GI(n)$ из положительной становится отрицательной и $MC=\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm+bn}$, так что MC будет меньше MG (m) и всегда положительна. Отсюда видно, что во всех этих случаях величина радиуса развертки MC всегда положительна.

Следствие III.

180. Всегда, когда образующая точка M (черт. 136) оказывается внутри окружности подвижного круга, $MC=\frac{2amm+2bmm}{2am+2bm-bn}$; при этом может случиться, что bn больше $2am+2bm$, и таким образом величина радиуса развертки MC отрицательна. Отсюда видно, что если она перестает быть положительной и становится отрицательной, как это случается (*§ 81*), когда точка M есть точка перегиба, то необходимо $bn=2am+2bm$; и следовательно,

$$MI\times MG(mn-mm)=\frac{2amm+bmm}{b}.$$

Обозначив данную KM через c, мы получим из свойства круга:

$$MI\times MG\left(\frac{2amm+bmm}{b}\right)=BM\times MN(aa-cc),$$

и значит неизвестная

$$MG\,(m) = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}.$$

Следовательно, если из данной точки M как из центра описать круг радиусом $MG = \sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$, то он пересечет подвижной круг в точке G, в которой он касается неподвижного круга, служащего ему основанием, когда образующая точка M попадает в точку перегиба F.

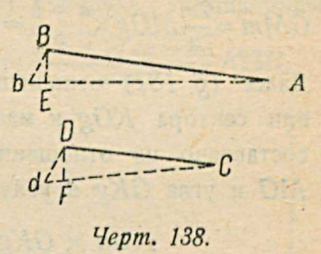
Если провести MR перпендикулярно BN, то очевидно, что при этом $MG\left(\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}\right)$ будет меньше $MR\,(\sqrt{aa - cc})$; MG будет равна MR, когда b бесконечно велико, т. е. когда основание эпициклоиды обращается в прямую линию.

Следует заметить, что, для того чтобы круг, описанный радиусом MG, пересекал подвижной круг, надо, чтобы MG была больше MN, т. е. $\sqrt{\frac{aab - bcc}{2a + b}}$ больше $a - c$, и значит $KM\,(c)$ — больше $\frac{aa}{a + b}$. Отсюда ясно, что для существования точки перегиба у эпициклоиды AMD надо, чтобы KM была меньше KN и больше $\frac{aa}{a + b}$.

Лемма III.

181. Пусть *в каждом из треугольников* ABb *и* CDd (черт. 138) *стороны* Bb *и* Dd *бесконечно малы по сравнению с другими. Я утверждаю, что отношение тре-*

угольника ABb *к треугольнику* CDd *составлено из отношений угла* BAb *к углу* DCd *и квадрата стороны* AB *или* Ab *к квадрату стороны* CD *или* Cd.



Черт. 138.

Действительно, если описать из центров A и C радиусами AB и CD круговые дуги BE и DF, то очевидно (*§ 2*), что треугольники ABb и CDd не будут отличаться от круговых секторов ABE и CDF. Значит, и т. д. Если стороны AB и CD равны, треугольники ABb и CDd будут относиться между собой, каких углы BAb и DCd.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.

Задача.

182. При *прежних условиях и предполагая известной квадратуру круга, найти квадратуру пространства* MGBA (черт. 135), *заключенного между перпендикулярами к эпициклоиде* MG *и* BA, *дугой* GB *и отрезком* AM *полуэпициклоиды AMD.*

Угол $GMg\left(\frac{n}{2m}\,GKg\right)$ относится к углу

$$MGm\left(\frac{a+b}{b}\,GKg\right),$$

как (*§ 181*) маленький треугольник MGg, имеющий основанием дугу подвижного круга Gg, к маленькому треугольнику или сектору GMm; следовательно,

обозначая MI через p и подставляя вместо m его значение $p+n$, сектор

$$GMm=\frac{2m}{n}MGg\times\frac{a+b}{b}=\frac{2a+2b}{b}MGg+\frac{2ap+2bp}{bn}MGg.$$

Далее (§ *181*) отношение маленького треугольника или сектора KGg к маленькому треугольнику MGg составлено из отношения квадрата KG к квадрату MG и угла GKg к углу GMg, т. е.

$$::aa\times GKg\,.\,mm\times\frac{n}{2m}GKg,$$

и, следовательно, маленький треугольник

$$MGg=\frac{mn}{2aa}KGg.$$

Подставляя это значение вместо треугольника MGg в $\frac{2ap+2bp}{bn}MGg$, получим, что сектор

$$GMm=\frac{2a+2b}{b}MGg+\frac{\overline{a+b}\times pm}{aab}KGg.$$

Но, по свойству круга,

$$GM\times MI(pm)=BM\times MN(cc-aa),$$

т. е. постоянной величине, которая остается неизменной, где бы ни находилась образующая точка M. Следовательно, $GMm+MGg$ или mGg, т. е. малая площадь эпициклоиды

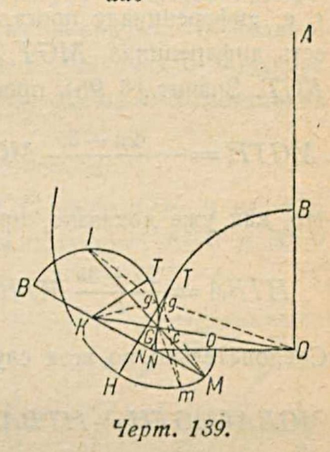
$$GMmg=\frac{2a+3b}{b}MGg+\frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGg.$$

Так как $GMmg$ есть диференциал площади эпициклоиды $MGBA$, MGg — диференциал пространства MGB,

ограниченного прямыми MG и MB и дугой GB, и наконец малый сектор KGg есть диференциал сектора KGB, то (§ 96) площадь эпициклоиды

$$MGBA = \frac{2a+3b}{b} MGB + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGB.$$

Что и требовалось найти.



Черт. 139.

Если образующая точка M (черт. 139) оказывается вне окружности подвижного круга BGN, а точка касания G попадает на дугу NT, то очевидно, что перпендикуляры MG и mg пересекаются в точке C и что $m=p-n$ (§ 180). Поэтому, если подставить, как и прежде, вместо малого треугольника MGg его величину $\frac{mn}{2aa}$ KGg, то малый сектор

$$GMm = -\frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{2ap+2bp}{bn} MGg =$$

$$= -\frac{2a-2b}{b} MGg + \frac{amp+bmp}{aab} KGg$$

и, следовательно, подставляя вместо pm его значение $cc-aa$, $GMm - MGg$ или mGg, т. е.

$$MCm - GCg = -\frac{2a-3b}{b} MGg + \frac{\overline{a+b} \times \overline{cc-aa}}{aab} KGg.$$

Предположим, что TH есть положение касательной TM подвижного круга, когда его точка T касается основания в точке T; тогда очевидно, что

$$MCm - GCg = MGTH - mgTH,$$

т. е. диференциалу пространства $MGTH$, и что MGg есть диференциал MGT, а также KGg диференциал KGT. Значит (§ 96), пространство

$$MGTH = -\frac{2a-3b}{b}MGT + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KGT.$$

Но, как уже доказано, пространство

$$HTBA = \frac{2a+3b}{b}MTB + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}KTB.$$

Следовательно, во всех случаях и всегда пространство

$$MGBA(MGTH + HTBA) = \frac{2a+3b}{b}\overline{MTB - MGT}$$

$$\text{или } MGB + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}\overline{KGT+KTB} \text{ или } KGB.$$

Итак, все пространство $DNBA$ (черт. 135), заключенное между двумя перпендикулярами к эпициклоиде DN и BA, дугой круга BGN и полуэпициклоидой

$$AMD, \text{ будет} = \overline{\frac{2a+3b}{b} + \frac{\overline{a+b}\times\overline{cc-aa}}{aab}}\, KNGB;$$

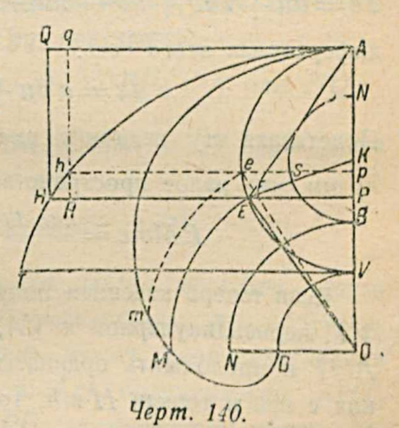
действительно, и сектор KGB и часть круга MGB обращаются в полукруг, когда точка касания G попадает в точку N.

Когда образующая точка M (черт. 136) попадает внутрь подвижного круга, надо в предыдущие формулы вставить $aa - cc$ вместо $cc - aa$, потому что тогда $BM \times MN = aa - cc$.

При $c = a$ получим квадратуру эпициклоид, образующая точка которых лежит на окружности подвижного круга, а предположив b бесконечно большим, получим квадратуру циклоид, имеющих основаниями прямые линии.

Другое решение.

183. Опишем радиусом OD дугу DV и на диаметрах AV и BN построим полукруги AEV и BSN (черт. 140). Описав из центра O произвольную дугу EM, заключенную между полукругом AEV и полуэпициклоидой AMD, проведем ординату EP. Требуется найти квадратуру пространства AEM, заключенного между дугами AE и EM и AM, отрезком полуэпициклоиды AMD.



Черт. 140.

Для этого возьмем другую дугу em, бесконечно близкую к EM и концентрическую с ней, другую ординату ep и еще другую Oe, пересекающую в точке F продолженную (если нужно) дугу ME.

Обозначив переменные: OE через z, VP через u, дугу AE через x, а постоянные, как прежде: OB через b, KB или KN через a, KV или KA через c, получим: $Fe = dz$; $Pp = du$; $OP = a + b - c + u$;

$$\overline{PE}^2 = 2cu - uu; \quad \text{дуга } EM \ (\S\ 172) = \frac{axz}{bc};$$

следовательно, прямоугольник, образованный дугой EM и маленькой прямой Fe, т. е. (§ 2) малое пространство

$$EMme = \frac{axz\,dz}{bc}.$$

Из прямоугольного треугольника OPE имеем, что

$$zz = aa + 2ab + bb - 2ac - 2bc + cc + 2au + 2bu;$$

диференциал этого есть:

$$z\,dz = a\,du + b\,du.$$

Подставляя эту величину вместо $z\,dz$ в $\frac{axz\,dz}{bc}$, получим, что малое пространство

$$EMme = \frac{aax\,du + abx\,du}{bc}.$$

Если теперь качением полукруга AEV по прямой VT, перпендикулярной к VA, описать полуциклоиду AHT и продолжить ординаты PE и pe до пересечения с ней в точках H и h, то очевидно, что (§ 172) $EH \times Pp$, т. е. малое пространство

$$EHhe = x\,du;$$

и значит

$$EMme\left(\frac{aax\,du + abx\,du}{bc}\right) . EHhe(x\,du) : : aa + ab \,.\, bc.$$

А это отношение постоянно. Так как это имеет место, где бы ни взять дугу EM, то сумма всех малых пространств $EMme$, т. е. пространство AEM, относится к сумме всех малых пространств $EHhe$, т. е. к пространству $AEH :: aa + ab \,.\, bc$. Но мы уже имеем (§ 99) зависимость между квадратурой пространства AEH и квадратурой круга, а следовательно, имеем и квадратуру искомого пространства AEM.

Это же можно доказать без всяких выкладок, как я это показал в *Actes de Leypsic* от августа месяца 1695 года.

Квадратуру пространства AEH можно найти и не прибегая к § 99. Действительно, если докончить прямоугольники PQ и pq, получается:

$$Qq \text{ или } HR \,.\, Pp \text{ или } Rh :: EP \,.\, PA \text{ или } HQ,$$

потому что (§ 18) касательная в H параллельна хорде AE, и, следовательно:

$$HQ \times Qq = EP \times Pp,$$

т. е. малые пространства $HQqh$ и $EPpe$ всегда равны между собой. Отсюда следует, что пространство AHQ, заключенное между перпендикулярами AQ и QH и отрезком AH полуциклоиды AHT, равно пространству APE, заключенному между перпендикулярами AP и PE и дугой AE. Стало быть пространство AEH равно прямоугольнику PQ минус удвоенная часть круга APE, т. е. прямоугольнику, построенному на PE и KA плюс или минус прямо-

угольник, построенный на KP и дуге AE, в зависимости от того, окажется ли точка P ниже или выше центра. Следовательно, искомое пространство

$$AEM = \frac{aa + ab}{bc} \overline{PE \times KA \pm KP \times AE}.$$

Следствие I.

184. Когда точка P попадает в K, прямоугольник $KP \times AE$ исчезает, а прямоугольник $PE \times KA$ становится равным квадрату KA. Отсюда видно, что в этом случае пространство

$$AEM = \frac{aac + abc}{b},$$

и, следовательно, оно абсолютно квадрируемо, независимо от квадратуры круга.

Следствие II.

185. Если прибавить к пространству AEM сектор AKE, то пространство $AKEM$, заключенное между радиусами AK и KE, дугой EM и отрезком AM полуэпициклоиды AMD, равняется (когда точка P попадает выше центра K):

$$\frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc} AE +$$

$$+ \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA;$$

следовательно, взяв

$$VP(u) = \frac{2aac + 2abc + bcc}{2aa + 2ab},$$

что обращает в нуль величину

$$\frac{bcc + 2aac + 2abc - 2aau - 2abu}{2bc} AE,$$

получим, что пространство

$$AKEM = \frac{aa + ab}{bc} PE \times KA.$$

Отсюда видно, что его квадратура также не зависит от квадратуры круга.

Очевидно, что из всех пространств AEM и $AKEM$ только два сейчас упомянутых обладают абсолютной квадратурой.

Предупреждение.

Все доказанное только что по отношению к эпициклоидам относится также и к гипоциклоидам, т. е. к таким циклоидам, подвижной круг которых катится по неподвижному изнутри. При этом радиусы KB (a) *и* KV (c) *из положительных становятся отрицательными, и поэтому в предыдущих формулах надо переменить знаки при членах нечетного измерения относительно* a *и* c[130].

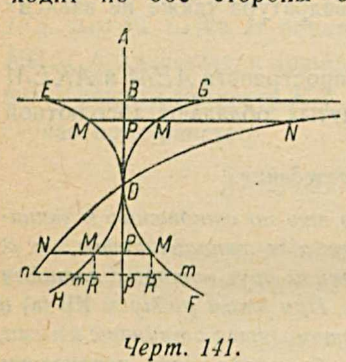
Замечание.

186. Существуют некоторые кривые, которые кажутся имеющими точку перегиба и, однако, ее не имеют; так как это может представить кое-какие затруднения, я считаю уместным объяснить это на примере.

Пусть природа геометрической кривой NDN (черт. 141) выражается уравнением:

$$z = \frac{xx - aa}{\sqrt{2xx - aa}} \quad (AP = x,\ PN = z),$$

в котором, как это ясно: 1° при $x=a$, $PN(z)$ исчезает; 2° при x, большем a, величина z положительна и, наоборот, при x, меньшем a, она отрицательна; 3° при $x=\sqrt{\frac{1}{2}aa}$ величина PN бесконечно велика. Отсюда видно, что кривая NDN проходит по обе стороны от своей оси, пересекая ее в точке D, для которой $AD=a$, и что она имеет асимптотой перпендикуляр BG, проведенный через точку B, для которой $AB=\sqrt{\frac{1}{2}aa}$.



Черт. 141.

Опишем теперь другую кривую EDF так, чтобы, при произвольно проведенном перпендикуляре MPN прямоугольник, построенный на ординате PM и постоянной AD, всегда был равен соответствующему пространству DPN. Ясно, что если обозначить PM через y и продиференцировать, то получится:

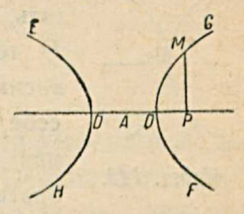
$$AD \times Rm\,(a\,dy) =$$
$$= NPpn \text{ или } NP \times Pp\left(\frac{xx\,dx - aa\,dx}{\sqrt{2xx-aa}}\right);$$

следовательно,

$$Rm\,(dy)\,.\,Pp \text{ или } RM\,(dx) :: PN\,.\,AD.$$

Отсюда следует, что кривая EDF касается асимптоты BG, продолженной по другую сторону B, в точке E

и касается оси AP в точке D и, таким образом, должна иметь точку перегиба в D. Однако (*§ 78*) для радиуса развертки мы находим величину $-\frac{x^3}{2aa}$, которая всегда отрицательна и становится равной $-\frac{1}{2}a$, когда точка M попадает в D; отсюда следует заключить (*§ 81*), что кривая, проходящая через все точки M, постоянно обращена выпуклостью к оси AP и что она не имеет точки перегиба в D. Как же все это согласовать? Вот объяснение.



Черт. 142.

Если взять PM с той же стороны, что и PN, то образуется другая кривая GDH, которая совершенно подобна EDF и должна составлять ее часть, так как происхождение их обеих одинаково. Если это так, то надо думать, что частями, составляющими всю кривую, являются не EDF и GDH, как казалось, а EDH и GDF, которые соприкасаются в точке D; при этом последнем предположении все совершенно согласуется. Это подтверждается еще следующим примером.

Пусть кривая DMG (черт. 142) имеет уравнение:

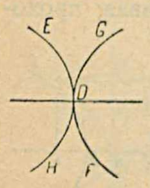
$$y^4 = x^4 + aaxx - b^4 \ (AP = x,\ PM = y).$$

Из этого уравнения следует, что вся кривая состоит из двух частей EDH и GDF, противолежащих одна

другой, как в обыкновенной гиперболе, так что расстояние между ними

$$DD \text{ или } 2AD = \sqrt{-2aa + 2\sqrt{a^4 + 4b^4}}.$$

При предположении, что b исчезает, расстояние DD (черт. 143) исчезает тоже, и, следовательно, обе части EDH и GDF соприкасаются в точке D; таким образом можно было бы полагать, что эта кривая имеет в точке D точку перегиба или возврата в зависимости от того, представлять ли себе, что ее части суть EDF и GDH или EDG и HDF. Но легко разобраться в этом, если найти радиус развертки; он окажется всегда положительным и будет в точке D равен $\frac{1}{2}a$.



Черт. 143.

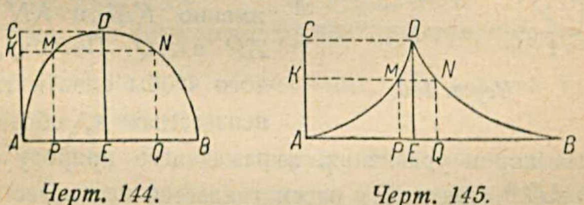
Можно мимоходом заметить (черт. 141), что квадратура пространства DPN зависит от квадратуры гиперболы или (что сводится к тому же) от спрямления параболы, и что отрезок кривой DMF удовлетворяет условиям задачи, предложенной г. Бернулли во втором томе „Supplémens des Actes de Leypsic“, стр. 291 [131]).

ГЛАВА X

НОВЫЙ СПОСОБ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ КРИВЫХ, ИЗ КОТОРОГО ВЫВОДИТСЯ МЕТОД гг. ДЕКАРТА И ГУДДЕ

Определение

Пусть кривая ABD такова (черт. 144, 145, 146), что линии KMN, параллельные ее диаметру AB, пересекают ее в двух точках M и N, и пусть отсе-



Черт. 144. *Черт. 145.*

ченная часть MN или PQ становится бесконечно малой. В таком случае она будет называться диференциалом абсциссы AP или KM.

Следствие I.

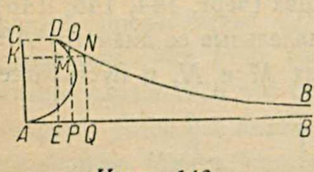
187. Очевидно, что, когда отрезок MN или PQ становится бесконечно малым, каждая из абсцисс AP и AQ становится равной AE и точки M и N соединяются в одну точку D; при этом ордината ED есть наибольшая или наименьшая из всех ей подобных PM и NQ.

Следствие II.

188. Очевидно, что из всех абсцисс AP только AE имеет диференциал, потому что только в этом случае PQ становится бесконечно малой.

Следствие III.

189. Если обозначить неопределенные: AP или KM через x, PM или AK через y, то очевидно, что при неизменном AK (y) должны существовать два различных значения x, а именно KM и KN или AP и AQ. Поэтому, для того чтобы одна и та же неизвестная x, обозначающая корни уравнения, выражающего природу кривой ADB (так как y рассматривается как известная), могла иметь различные значения, уравнение это должно быть свободным от иррациональностей. Это надо иметь в виду в дальнейшем.



Черт. 146.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.

Задача.

190. Природа *геометрической кривой* ADB *известна. Определить наибольщую или наименьшую из ее ординат* ED.

Если продиференцировать уравнение, выражающее природу кривой, обращаясь с y, как с постоянным, а с x — как с переменным, то, очевидно, получится (*§ 188*) новое уравнение, одним из корней которого x является такая величина AE, что ордината ED будет наибольшей или наименьшей из всех ей подобных.

Пусть, например, $x^3 + y^3 = axy$. Диференциал этого, если считать x за переменное, а y за постоянное, дает:

$$3xx\,dx = ay\,dx,$$

и, следовательно,

$$y = \frac{3xx}{a}.$$

При подстановке этого значения вместо y в уравнение кривой $x^3 + y^3 = axy$ для x получается такая величина $AE = \frac{1}{3}\,a\sqrt[3]{2}$, что ордината ED будет наибольшей из всех ей подобных, как это уже было найдено в *§ 48*.

Очевидно, что так определяются не только те точки D, в которых ординаты ED перпендикулярны или касательны к кривой ADB, но также и те точки D, в которых ординаты наклонны к кривой, т. е. точки возврата первого и второго рода. Отсюда видно,

что этот новый способ рассматривать диференциалы при исследовании геометрических кривых в некоторых случаях более прост и удобен, чем (гл. *III*) первый [132]).

Замечание.

191. Можно заметить, что в кривых, имеющих точку возврата, линии PM (черт. 146), параллельные AK, пересекаются с кривой в двух точках M и O, так же как и KM, параллельные AP, — в точках M и N, и значит, при одном и том же $AP(x)$, y имеет два различных значения: PM и PO. Поэтому при диференцировании уравнения, выражающего природу этой кривой, можно обращаться с x как с постоянной, а с y — как с переменной. Отсюда видно, что если при этом диференцировании считать x и y переменными, то надо, чтобы все члены, на которые умножается dx с одной стороны, и все, на которые умножается dy с другой, были равны нулю [133]). Следует иметь в виду, чтобы dx и dy обозначали здесь разности двух ординат, выходящих из одной и той же точки, а не (как раньше в гл. *III*) разности двух бесконечно близких ординат [134]).

Следствие.

192. Если продиференцировать, предварительно упорядочив его, уравнение кривой с одной только неизвестной переменной x, то очевидно: 1° что при этом лишь помножают каждый член на показатель степени при x и на диференциал dx и делят его затем на x; 2° что этим умножением на dx, так же как и деле-

нием на x, можно пренебречь, так как они одинаковы для всех членов; 3° что показатели степени при x образуют арифметическую прогрессию, первый член которой есть показатель наибольшей степени, а последний — нуль, так как по предположению недостающие члены уравнения отмечены звездочкой[185]).

Пусть, например, $x^3 \star - ayx + y^3 = 0$. Если помножить каждый его член на член арифметической прогрессии 3, 2, 1, 0, то образуется новое уравнение $3x^3 - ayx = 0$.

$$\begin{array}{l} x^3 \;\; \star - ayx + y^3 = 0 \\ 3, \;\; 2, \quad\;\; 1, \quad\;\; 0 \\ \hline 3x^3 \star - ayx \quad \star = 0. \end{array}$$

Отсюда $y = \frac{3xx}{a}$ так же, как это получилось бы при диференцировании обычным способом.

Теперь я утверждаю, что вместо арифметической прогрессии 3, 2, 1, 0 можно воспользоваться любой другой арифметической прогрессией $m+3$, $m+2$, $m+1$, $m+0$ или m (через m обозначено произвольное число, целое или дробное, положительное или отрицательное). Действительно, при умножении $x^3 \star - ayx + y^3 = 0$ на x^m получается $x^{m+3} \star$ и т. д. $= 0$; все члены чего для получения диференциала должны быть помножены на соответствующие члены прогрессии $m+3$, $m+2$, $m+1$, m.

$$\begin{array}{lllll} x^{m+3} & \star & -ayx^{m+1} & +y^3x^m & =0 \\ m+3, & m+2, & m+1, & m & \\ \hline \overline{m+3}x^{m+3} & \star & -\overline{m+1}ayx^{m+1} & +my^3x^m & =0. \end{array}$$

Это дает:

$$\overline{m+3}x^{m+3} - \overline{m+1}ayx^{m+1} + my^3x^m = 0;$$

деля на x^m, получаем:

$$\overline{m+3}x^3 - \overline{m+1}\,ayx + my^3 = 0.$$

Это можно было найти и сразу простым умножением предложенного уравнения на прогрессию $m+3$, $m+2$, $m+1$, m [136]).

Если $m = -3$, прогрессия будет:

$$0,\ -1,\ -2,\ -3,$$

а уравнение

$$2ayx - 3y^3 = 0.$$

Если $m = -1$, прогрессия будет:

$$2,\ 1,\ 0,\ -1,$$

а уравнение

$$2x^3 - y^3 = 0.$$

Можно переменить знаки при всех членах прогрессии, т. е. вместо $0, -1, -2, -3$ и $2, 1, 0, -1$ можно взять $0, 1, 2, 3$ и $-2, -1, 0, 1$, потому что при этом только меняются знаки всех членов нового уравнения, которое должно быть приравнено нулю. В самом деле, вместо

$$2ayx - 3y^3 = 0 \text{ и } 2x^3 - y^3 = 0$$

получится:

$$-2ayx + 3y^3 = 0 \text{ и } -2x^3 + y^3 = 0,$$

что то же самое.

Очевидно, что все доказанное нами для этого примера применимо таким же способом и ко всем остальным. Отсюда следует, что если упорядочить уравнение, которое должно иметь два равных корня, и помножить все его члены на члены произвольной арифметической прогрессии, то получится новое уравнение, которое будет иметь среди своих корней один из двух равных корней первого уравнения. По тому же правилу, если это новое уравнение должно снова иметь два равных корня и если помножить его на арифметическую прогрессию [137]), то получится третье уравнение, которое будет иметь среди своих корней один из двух равных корней второго и так далее. Таким образом, если помножить уравнение, имеющее три равных корня, на произведение двух арифметических прогрессий [138]), то получится новое уравнение, которое будет иметь среди своих корней один из трех равных корней первого уравнения; точно так же, если уравнение должно иметь четыре равных корня, его надо помножить на произведение трех арифметических прогрессий; если пять, то на произведение четырех и т. д.

В этом как раз и состоит метод г. Гудде [139]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ II.

Задача.

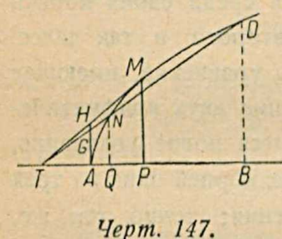
193. Из *данной точки* T (черт. 147) *на диаметре* AB *или из данной точки* H *на линии* AH, *параллельной ординатам, провести касательную* THM.

Проведем через точку касания M ординату MP и обозначим данные: AT через s, AH через t, а неизвестные: AP через x, PM через y. Из подобия треугольников TAH и TPM следует, что

$$y=\frac{st+tx}{s},$$

$$x=\frac{sy-st}{t}.$$

При подстановке этих значений вместо y или x в данное уравнение, выражающее природу кривой AMD, получается новое уравнение, уже не содержащее y или x.



Черт. 147.

Если теперь провести прямую линию TD, которая пересечет прямую AH в G и кривую AMD в двух точках N и D, и из последних опустить ординаты NQ и DB, то очевидно, что, поскольку t в предыдущем уравнении выражает AG, x или y будут иметь два значения: AQ и AB или NQ и DB, которые становятся равными между собой и равными искомой AP или PM, когда t выражает AH, т. е. когда секущая TND становится касательной TM. Отсюда следует, что это уравнение должно иметь два равных корня. Поэтому его надо умножить на произвольную арифметическую прогрессию и повторить это, если нужно, умножая это же самое уравнение на другую

произвольную арифметическую прогрессию, для того чтобы путем сравнения получившихся уравнений можно было найти такое, которое содержало бы только неизвестную x или y и данную s или t. Следующий пример в достаточной мере разъясняет этот метод [140]).

Пример.

194. Пусть уравнение, выражающее природу кривой AMD, будет $ax = yy$. Если подставить вместо x его значение $\frac{sy - st}{t}$, получится [уравнение] tyy и т. д., которое должно иметь два равных корня.

$$\begin{array}{c} tyy - asy + ast = 0 \\ 1, \quad 0, \; - \; 1 \\ \hline tyy \quad \star \quad - ast = 0, \end{array}$$

Поэтому, умножая по порядку все члены на члены арифметической прогрессии 1, 0, —1, найдем $as = yy = ax$ и, следовательно, $AP\,(x) = s$. Отсюда видно, что если взять $AP = AT$ и провести ординату PM, то линия TM будет касательной в M. Если вместо $AT\,(s)$ дано $AH\,(t)$, надо умножить то же самое уравнение tyy и т. д. на другую прогрессию 0, 1, 2; в результате получится искомая $PM\,(y) = 2t$.

То же построение можно получить, подставляя в $ax = yy$, вместо y его значение $\frac{st + tx}{s}$. Тогда получится $ttxx$ и т. д.; умножив члены этого уравнения на 1, 0, —1, мы найдем $xx = ss$ и, следовательно, $AP\,(x) = s$.

Следствие.

195. Если предположить, что точка касания M дана и надо найти точку T или H, в которой касательная MT пересекает диаметр AB или линию AH, параллельную ординатам, то достаточно в последнем уравнении, которое выражает значение неизвестной x или y через данную s или t, рассматривать эту последнюю как неизвестную, а x или y как данную.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ III.

Задача.

196. Природа *геометрической кривой* AFD (черт. 148) *известна. Определить ее точку перегиба* F.

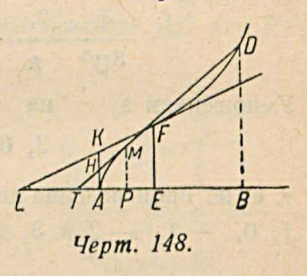
Проведя через искомую точку F ординату FE и касательную FL, а через точку A (начало отсчета x) AK, параллельную ординатам, и обозначив неизвестные: LA через s, AK через t, AE через x, EF через y, мы снова получим из подобных треугольников LAK и LEF, что

$$y = \frac{st + tx}{s} \text{ и } x = \frac{sy - st}{t}.$$

Поставив эти значения вместо y или x в уравнение кривой, мы получим новое уравнение, в которое y или x уже не войдут, так же как и в предыдущем предложении.

Если теперь провести прямую TD, которая пересекает прямую AK в H, касается кривой AFD в M

и пересекает ее в D, и опустить ординаты MP и DB, то очевидно, что: 1° когда s выражает AT, а t выражает AH, то найденное уравнение должно иметь два одинаковых корня, равных (§ 193) AP или PM, в зависимости от того, что исключается: y или x, и один отличный корень AB или BD; 2° когда s выражает AL, а t выражает AK, точка касания M сливается с точкой пересечения D в искомой точке F, так как (§ 67) в точке перегиба F касательная LF и касается кривой и пересекает ее; следовательно, значения x, т. е. AP и AB, или значения y, т. е. PM и BD, становятся равными между собой, и именно равными каждое искомой AE или EF. Отсюда следует, что это уравнение должно иметь три равных корня. Поэтому его надо умножить на произведение двух произвольных арифметических прогрессий и повторить это, если нужно, умножая его на другое произведение двух арифметических прогрессий, для того чтобы путем сравнения получающихся уравнений можно было исключить неизвестные s и t.



Черт. 148.

Пример.

197. Пусть уравнение, выражающее природу кривой AFD, есть $ayy = xyy + aax$. Если подставить вместо x

его значение $\frac{sy - st}{t}$, получается уравнение $sy^3 - - styy - atyy$ и т. д.

$$\begin{array}{cccc} sy^3 - styy + aasy - aast = 0 \\ - at \\ 1, \quad 0, \quad -1, \quad -2 \\ 3, \quad 2, \quad 1, \quad 0 \\ \hline 3sy^3 \quad \star \quad -aasy \quad \star \quad = 0. \end{array}$$

Умножением этого на

$$3,\ 0,\ -1,\ 0,$$

т. е. на произведение двух арифметических прогрессий 1, 0, —1, —2 и 3, 2, 1, 0, получим:

$$yy = \frac{1}{3} aa.$$

Подставляя эту величину в уравнение кривой, найдем неизвестную

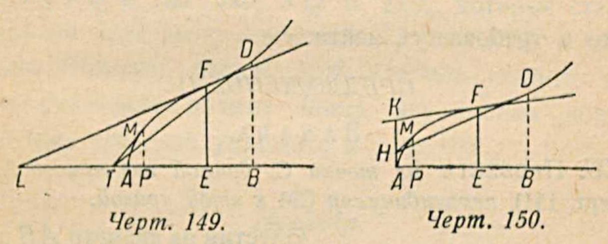
$$AE(x) = \frac{1}{4} a.$$

Это приводит нас к *§ 68*.

Другое решение.

198. Эту задачу можно также решить, заметив, что из той же точки L или K (черт. 149, 150) можно провести только одну касательную LF или KF, так как она касается извне вогнутой части AF и изнутри выпуклой FD, между тем как из всякой другой точки T или H, взятой на AL или AK между A и L или A и K, можно провести две касательных TM и TD или HM и HD: одну к вогнутой части, а другую — к выпуклой. Таким образом точку пере-

гиба F можно рассматривать как соединение двух точек касания M и D. Если предположить, что даны $AT(s)$ или $AH(t)$ и что ищется (§ *194*) выражение величины x или y через s или t, то получится уравнение, имеющее два корня: AP и AB или PM и BD, которые оба будут равны искомой AE или EF,



Черт. 149. *Черт. 150.*

когда s выражает AL, а t выражает AK. Поэтому надо умножить это уравнение на произвольную арифметическую прогрессию и т. д.

Пример.

199. Пусть, как и раньше, $ayy = xyy + aax$. Имеем опять:

$$sy^3 - styy - atyy + aasy - aast = 0,$$

умножение чего на арифметическую прогрессию

$$1,\ 0, -1, -2$$

дает:

$$y^3 \star - aay - 2aat = 0.$$

В последнее уравнение s уже не входит, и оно имеет два неравных корня, а именно PM и BD,

когда t выражает AH, и два корня, равных искомой EF, когда t выражает AK. Поэтому, умножив опять-таки последнее уравнение на арифметическую прогрессию 3, 2, 1, 0, получим $3yy - aa = 0$; следовательно,

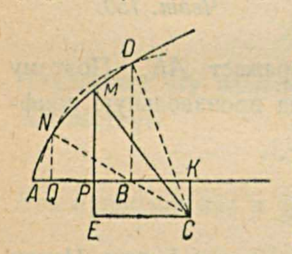
$$EF(y) = \sqrt{\frac{1}{3}aa}.$$

Что и требовалось найти.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IV.

Задача.

200. Провести *из точки* C, *данной вне кривой* AMD (черт. 151), *перпендикуляр* CM *к этой кривой.*



Черт. 151.

Опустим на диаметр AB перпендикуляры MP и CK и опишем из центра C круг радиусом CM; очевидно, что он коснется кривой AMD в точке M. Обозначив затем неизвестные: AP через x, PM через y, CM через r, а известные: AK через s, KC через t, получим: PK или $CE = s - x$, $ME = y + t$, а из прямоугольного треугольника MEC найдем:

$$y = -t + \sqrt{rr - ss + 2sx - xx},$$

$$x = s - \sqrt{rr - tt - 2ty - yy}.$$

Подставляя эти значения вместо y или x в уравнение кривой, получим новое уравнение, в которое x или y уже не войдут.

Если теперь из того же центра C описать другой круг, пересекающий кривую в двух точках N и D, и опустить перпендикуляры NQ и DB, то очевидно, что если r выражает в предыдущем уравнении радиус CN или CD, то x или y будут иметь два значения: AQ и AB или NQ и DB, которые станут равными друг другу и искомой AP или PM, когда r будет выражать радиус CM. Отсюда следует, что это уравнение должно иметь два равных корня. Поэтому его надо умножить и т. д. [141]).

Пример.

201. Пусть $ax=yy$ — уравнение, выражающее природу кривой AMD. Подставив в него вместо x его значение $s-\sqrt{rr-tt-2ty-yy}$, получим:

$$as-yy=a\sqrt{rr-tt-2ty-yy}.$$

Возведя каждую сторону [уравнения] в квадрат и упорядочив затем уравнение, найдем [уравнение] y^4 и т. д., которое должно иметь два равных корня, когда y выражает искомую PM.

$$\begin{array}{llllll} y^4 & \star & -2asyy & +2aaty & +aass & =0 \\ & & +aa & & -aarr & \\ & & & & +aatt & \\ 4, & 3, & 2, & 1, & 0 & \\ \hline 4y^4 & \star & -4asyy & +2aaty & \star & =0 \\ & & +2aa & & & \end{array}$$

Поэтому его надо умножить на арифметическую прогрессию 4, 3, 2, 1, 0, что даст [уравнение]:

$$4y^3 - 4asy + 2aay + 2aat = 0,$$

решение которого доставит для y искомую величину MP.

Когда данная точка C попадает на диаметр AB (черт. 152), $t = 0$ и значит надо уничтожить все члены, содержащие t; это дает:

$$4as - 2aa = 4yy = 4ax,$$

если подставить вместо yy его значение ax. Отсюда

$$x = s - \frac{1}{2}a,$$

Черт. 152.

т. е. если взять CP равным половине параметра и, нанеся ординату PM, перпендикулярную AB, провести прямую CM, то последняя будет перпендикулярна к кривой AMD.

Следствие.

202. Если предположить, что точка M (черт. 152) дана, а ищется точка C, то в последнем уравнении, выражающем величину $AC\,(s)$ через $AP\,(x)$ или $PM\,(y)$, надо рассматривать эти последние как известные, а первую — как неизвестную.

Определение II.

Если каким-либо радиусом развертки описать круг, он будет называться *соприкасающимся кругом.*

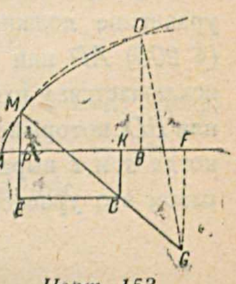
Точка, в которой этот круг касается кривой или соприкасается с ней, называется *точкой соприкосновения* [142]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ V.

Задача.

203. Природа кривой AMD (черт. 153) и какая-либо ее точка M известны. Найти C, центр круга, соприкасающегося с кривой AMD в точке M.

Опустив на ось перпендикуляры MP и CK и обозначив линии теми же буквами, что и в предыдущей задаче, мы придем к тому же уравнению. Следует только иметь в виду, что буквы x или y, которые там рассматривались как неизвестные, здесь обозначают данные величины и, наоборот, s и t, которые рассматривались там как известные, здесь оказываются неизвестными, так же как r.



Черт. 153.

При этом очевидно: 1° что искомая точка C будет находиться на перпендикуляре MG к кривой; 2° что всегда возможно описать круг, который касается кривой в M и пересекает ее по крайней мере в двух точках (я предполагаю D более близкой из них и опускаю из нее перпендикуляр DB), так как всегда можно найти круг, который пересекает произвольную отличную от круга кривую по крайней мере в четырех точках, а точка касания M равносильна

только двум пересечениям; 3° что чем больше центр G этого круга приближается к искомой точке C, тем больше точка пересечения D приближается к точке касания M, и, когда точка G попадает в точку C, точка D сливается с точкой M, так как (*§ 76*) круг, описанный радиусом CM, должен и касаться кривой и пересекать ее в одной и той же точке M. Отсюда видно, что, поскольку s выражает AF, а t выражает FG, уравнение должно иметь два корня, равных каждый (*§ 200*) AP или PM, в зависимости от того, что исключается: y или x, и еще один отличный корень AB или BD, который тоже становится равным AP или PM, когда s и t выражают искомые AK и KC; таким образом это уравнение должно иметь три равных корня.

Пример.

204. Пусть $ax = yy$ — уравнение, выражающее природу кривой AMD. Мы найдем (*§ 201*) [уравнение] y^4 и т. д., умножив которое на 8, 3, 0, —1, 0, т. е. на произведение двух арифметических прогрессий 4, 3, 2, 1, 0 и 2, 1, 0, —1, —2, получим, что $8y^4 = 2aaty$.

y^4 ★	$-2asyy$	$+2aaty$	$+aass = 0$
	$+aa$		$-aarr$
			$+aatt$
4, 3,	2,	1,	0
2, 1,	0,	—1,	—2
$8y4$ ★	★	$-2aaty$	★ $= 0$.

Отсюда находится искомая

$$KC \text{ или } PE(t) = \frac{4y^3}{aa}.$$

Если угодно найти уравнение, выражающее природу кривой, проходящей через все точки C, надо опять умножить y^4 и т. д. на 0, 3, 4, 3, 0, т. е. на произведение двух прогрессий 4, 3, 2, 1, 0 и 0, 1, 2, 3, 4; при этом получится:

$$8asy - 4aay = 6aat,$$

откуда, полагая для краткости $s - \frac{1}{2}a = u$, получаем, что

$$y = \frac{3at}{4u} \text{ и } 4y^3 = \frac{27a^3t^3}{16u^3} = aat,$$

и, следовательно,

$$16u^3 = 27att.$$

Отсюда следует, что кривая, проходящая через все точки C, есть вторая кубическая парабола, параметр которой $= \frac{27a}{16}$ и вершина которой отстоит от вершины данной параболы на $\frac{1}{2}a$, так как

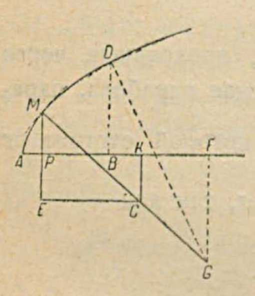
$$u = s - \frac{1}{2}a.$$

Если части кривой, соседние с точкой M, расположены с обеих ее сторон совершенно одинаково, как это имеет место, когда кривизна в ней наибольшая или наименьшая, то одно из пересечений каса-

тельного круга с кривой может слиться с точкой касания только в том случае, когда и другое сольется с ней; таким образом уравнение должно при этом иметь четыре равных корня. В самом деле, умножив y^4 и т. д. на 24, 6, 0, 0, 0, т. е. на произведение трех арифметических прогрессий 4, 3, 2, 1, 0; 3, 2, 1, 0, —1 и 2, 1, 0, —1, —2, получим $24y^4 = 0$; это показывает, что точка M должна попасть в вершину A параболы для того, чтобы расположение соседних с ней частей кривой было одинаково с обеих ее сторон.

Другое решение.

205. Эту задачу можно еще решить (черт. 154), вспомнив, что в параграфе 76 было доказано, что из искомой точки C можно провести к кривой AMD только один перпендикуляр CM и что в то же время на этом перпендикуляре MC имеется бесконечное множество точек G, из которых можно провести к кривой по два перпендикуляра MG и GD. Если предположить, что точка G дана и что ищется (*§ 200*) выражение величины x или y через данные s и t, то очевидно, что это уравнение должно иметь два неравных корня, а именно AP и AB или PM и BD, которые становятся



Черт. 154.

равными между собой, когда точка G попадает в искомую точку C. Поэтому это уравнение надо помножить на произвольную арифметическую прогрессию и т. д.

Пример.

206. Пусть, как и выше, $ax = yy$; будем иметь (*§ 201*) $4y^3$ и т. д.

$$\begin{array}{cccc} 4y^3 & \star & -4asy & +2aat = 0 \\ & & +2aa & \\ 2, & 1, & 0, & -1 \\ \hline 8y^3 & \star & \star & -2aat = 0 \end{array}$$

Умножение этого на арифметическую прогрессию 2, 1, 0, -1 дает (*§ 204*), как и раньше, $t = \frac{4y^3}{aa}$.

Следствие.

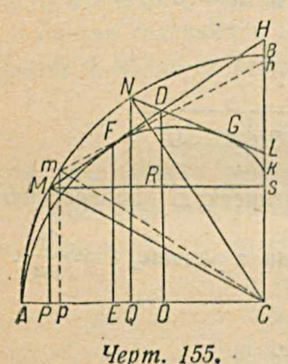
207. Очевидно, что можно (черт. 153, 154) рассматривать точку соприкосновения как (*§ 203*) слияние точки касания с точкой пересечения того же круга или же как (*§ 205*) слияние двух точек касания двух различных концентрических кругов, подобно тому, как точку перегиба можно рассматривать (*§ 196*) как слияние точки касания с точкой пересечения той же прямой или (*§ 198*) как слияние двух точек касания двух различных прямых, выходящих из одной точки.

Предложение VI.

Задача.

208. Найти *уравнение, выражающее природу каустики* AFGK (черт. 155), *образованной в четверти круга* CAMNB *отраженными лучами* MH, NL *и т. д., падающие лучи которых* PM, QN *и т. д. параллельны* CB.

Я замечаю следующее: 1° Если продолжить отраженные лучи MF и NG, которые касаются каустики в точках F и G, до их пересечения в точках H и L с радиусом CB, то MH окажется равной CH и NL равной CL. Действительно угол $CMH = CMP = MCH$, а также угол $CNL = CNQ = NCL$.



Черт. 155.

2° Из данной точки F на каустике AFK можно провести только одну прямую MH, равную CH; между тем из данной точки D между четвертью круга AMB и каустикой AFK можно провести две таких линии MH и NL, что $MH = CH$ и $NL = CL$. Действительно, из точки F можно провести только одну касательную MH, в то время как из точки D их можно провести две: MH и NL.

После того, как это уже установлено, пусть будет предложено из данной точки D провести прямую MH

так, чтобы она равнялась отрезку CH, который она отсекает на радиусе CB.

Проведя MP и DO параллельно CB, и MS — параллельно CA, обозначим данные: CO или RS через u, OD через z, AC или CB через a, а неизвестные: CP или MS через x, PM или CS через y, CH или MH через r. Прямоугольный треугольник MSH дает:

$$rr = rr - 2ry + yy + xx.$$

Отсюда

$$CH(r) = \frac{xx + yy}{2y}.$$

Кроме того подобные треугольники MRD и MSH дают:

$$MR\,(x-u) . MS\,(x) :: RD\,(z-y) . SH = \frac{zx - xy}{x - u},$$

и, следовательно, подставляя вместо $xx + yy$ его значение aa, получим $CS + SH$ или $CH = \frac{zx - uy}{x - u} =$ $= \frac{xx + yy}{2y} = \frac{aa}{2y}$. Отсюда получается (перемножением накрест) уравнение:

$$aax - aau = 2zxy - 2uyy,$$

а если подставить вместо yy его значение $aa - xx$, получится:

$$2zxy = aax + aau - 2uxx.$$

Возводя затем обе стороны [уравнения] в квадрат, чтобы

избавиться от иррациональностей, и подставляя опять вместо yy его значение $aa - xx$, получим наконец:

$$\begin{array}{llll} 4uux^4 - 4aaux^3 + & 4aauuxx + & 2a^4ux + a^4uu = 0. \\ 4zz & - 4aazz & \\ & + a^4 & \end{array}$$

Очевидно, что когда u выражает CO, а z выражает OD, это уравнение должно иметь два различных корня, а именно CP и CQ; наоборот, когда u выражает CE, а z выражает EF, то CQ становится равным CP и оно имеет тогда два одинаковых корня. Поэтому если помножить его члены на члены двух арифметических прогрессий 4, 3, 2, 1, 0 и 0, 1, 2, 3, 4, то получатся два новых уравнения, посредством которых после исключения неизвестной x найдется уравнение:

$$\begin{array}{llll} 64z^6 - 48aaz^4 & + 12a^4zz & - a^6 & = 0, \\ \quad + 192uu & - 96aauu & - 15a^4uu & \\ & + 192u^4 & - 48aau^4 & \\ & & + 64u^6 & \end{array}$$

которое выражает связь между абсциссой $CE\,(u)$ и ординатой $EF\,(z)$. Что и требовалось найти.

Можно определять точку касания F и по методу, изложенному в восьмой главе. Действительно, если представить себе другой падающий луч pm, бесконечно близкий к PM, то очевидно, что отраженный луч mh пересечет MH в искомой точке F. Проведя через нее FE параллельно PM и обозначив CE

через u, EF через z, CP через x, PM через y, CM через a, найдем, как и выше:

$$\frac{aax + aau - 2uxx}{xy} = 2z.$$

Очевидно, что CM, CE, EF остаются без изменения, в то время как CP и PM изменяются. Поэтому это уравнение надо продиференцировать, обращаясь с a, u и z, как с постоянными, а с x и y — как с переменными; это дает:

$$2uyxx\,dx + aauy\,dx - aaxx\,dy - aaux\,dy +$$
$$+ 2ux^3dy = 0.$$

Подставляя сюда вместо dx его значение $-\frac{y\,dy}{x}$ (которое найдем, продиференцировав $yy = aa - xx$) и затем вместо yy его значение $aa - xx$, получим, наконец, $CE\,(u) = \frac{x^3}{aa}$.

Если предположить, что кривая AMB — уже не четверть круга, а какая-либо другая кривая, имеющая радиусом развертки в точке M прямую MC, то очевидно (§ 76), что ее малый отрезок Mm может рассматриваться как дуга круга, описанного из центра C. Отсюда следует, что если на падающий луч PM опустить из центра перпендикуляр CP и, взяв

$$CE = \frac{x^3}{aa}\ (CP = x,\ CM = a),$$

провести EF параллельно PM, то она пересечет отраженный луч MH в точке F, в которой он касается каустики AFK.

Соединим все точки M и m некоторой кривой AMB прямыми MC и mC с фиксированной на ее оси AC точкой C и проведем прямые MH и mh до пересечения с CB — перпендикуляром к оси так, что угол $CMH = MCH$ и $Cmh = mCh$. Пусть требуется найти на каждой MH точку F, в которой она касается кривой AFK, образованной непрерывными пересечениями этих прямых MH и mh. Как и прежде, мы найдем:

$$CH = \frac{xx + yy}{2y} = \frac{zx - uy}{x - u},$$

откуда

$$\frac{x^3 + uyy + xyy - uxx}{xy} = 2z.$$

Диференциал этого (если обращаться с u и z, как с постоянными, а с x и y — как с переменными) дает:

$$2x^3y\,dx - uxxy\,dx - x^4\,dy + ux^3dy + xxyy\,dy + \\ + uxyy\,dy - uy^3\,dx = 0,$$

и, следовательно, искомая

$$CE\,(u) = \frac{2x^3y\,dx - x^4\,dy + xxyy\,dy}{xxy\,dx - x^3\,dy + y^3\,dx - xyy\,dy}.$$

Поскольку природа кривой AMD известна, можно выразить величину dy через dx и подставить ее в выражение CE. Тогда это выражение будет свободным от диференциалов и вполне известным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ VII.

Задача.

209. Пусть AO *есть некоторая неопределенно продолженная прямая* (черт. 156) *с фиксированным началом в точке* A. *Пусть бесконечное множество парабол* BFD, CDG *имеет общей осью прямую* AO, *а параметрами — прямые* AB *и* AC, *ограниченные фиксированной точкой* A *и вершинами парабол* B *и* C. *Определить природу линии* AFG, *касающейся всех этих парабол.*

Я замечу сначала, что любые две из этих парабол BFD и CDG пересекаются в точке D, находящейся между линией AFG и осью AO, и что, когда AC становится равным AB, точка пересечения D попадает в точку касания F.

Черт. 156.

Проведем теперь через данную точку D параболу, обладающую указанными свойствами. Если провести ординату DO и обозначить данные AO через u, OD через z, а неизвестную AB через x, то свойство параболы даст:

$$AB \times BO\,(ux - xx) = \overline{DO}^2\,(zz),$$

или, упорядочивая уравнение,

$$xx - ux + zz = 0.$$

Очевидно, что когда u выражает AO, а z выражает OD, то это уравнение имеет два различных корня, а именно AB и CA, и, наоборот, когда u выражает AE,

а z выражает EF, то AC становится равным AB, т. е. уравнение имеет два одинаковых корня. Поэтому его надо умножить на арифметическую прогрессию 1, 0, —1, что даст:

$$x = z.$$

Подставив это значение вместо x, получим уравнение $u = 2z$, выражающее природу линии AFG. Отсюда видно, что AFG есть прямая линия, образующая с AO угол FAO, при котором AE равно удвоенному EF.

Если угодно разрешить этот вопрос в общем виде, какой бы степени ни были параболы BFD и CDG, надо воспользоваться методом, изложенным в восьмой главе, следующим образом. Обозначив AE через u, EF через z, AB через x, получим:

$$\overline{u - x}^{m} \times x^{n} = z^{m+n},$$

что выражает собою вообще природу параболы BF. Диференциал этого дает (если обращаться с u и z, как с постоянными, а с x — как с переменной):

$$-m \times \overline{u - x}^{m-1} dx \times x^{n} + nx^{n-1} dx \times \overline{u - x}^{m} = 0;$$

деля на $\overline{u - x}^{m-1} dx \times x^{n-1}$, получим:

$$-mx + nu - nx = 0;$$

отсюда

$$x = \frac{n}{m+n} u,$$

и, следовательно,

$$u - x = \frac{m}{m+n} u,$$

Значит, подставляя эти значения вместо $u-x$ и x в общее уравнение и полагая (для сокращения):

$$\frac{m}{m+n}=p,\quad \frac{n}{m+n}=q,\quad m+n=r,$$

получим:

$$z=u\sqrt[r]{p^m q^n}.$$

Отсюда видно, что линия AFG всегда прямая, как бы сложны ни были параболы. Изменяется только отношение AE к EF.

Из изложенного в этой главе ясно видно, как надо пользоваться методом гг. Декарта *и* Гудде, *чтобы разрешать вопросы этого рода в случае геометрических кривых. Но вместе с тем из него видно, что этот метод несравним с методом г.* Лейбница, *который я и старался со всей полнотой изложить в этом трактате, несравним потому, что там, где первый представляет только частные решения, последний дает общие решения, причем он распространяется на трансцендентные линии и не требует освобождения от иррациональностей, которое очень часто бывает невыполнимо.*

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

¹) Leurs perpendiculaires (т. е. нормали).

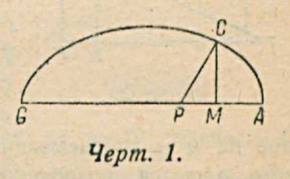
²) „Я перечитал трактат Архимеда о спиральных линиях дважды и трижды и напрягал все силы ума, чтобы проследить за тончайшими доказательствами относительно проведения касательных к спиралям, но должен сознаться: после рассмотрения их я не вынес уверенности в том, что в душе у меня не оставалось постоянного сомнения, что я не понял всей силы этого доказательства". Bullialdus — латинизированная форма фамилии французского астронома и математика, защитника гелиоцентрического учения, Ismael Bouillaud (1605—1694).

³) „Если Архимед сделал правильное заключение, то неправильное сделал Эвклид и т. д.", François Viète (1540—1603) — один из крупнейших алгебраистов, введением буквенных коэфициентов создавший возможность употребления формул в алгебре.

⁴) Так называемая задача Паппа (III в. н. э.) заключается в определении геометрического места точек, удовлетворяющих условию, что произведение прямых отрезков, проведенных от них под какими-либо данными углами к n

данным прямым, находится в заданном отношении к произведению отрезков, проведенных от них под некоторыми углами к n или $n-1$ другим данным прямым. Греки дали ее решение лишь при $n=4$ (местом оказывается коническое сечение); Декарт приводит общее ее решение в „Géometrie“ (1637), пользуясь созданным им аналитико-геометрическим методом.

[5]) Метод определения нормалей и касательных к алгебраическим кривым Р. Декарта (René Descartes, 1596—1650) — алгебраический; идея его заключается в следующем. Пусть PC есть нормаль в данной точке C эллипса GCA; требуется определить положение точки P, т. е. отрезок PA. Если из искомой точки P провести некоторым радиусом r окружность, то она пересечется с эллипсом близ C в двух точках C_1 и C_2. Решая совместно уравнение кривой с уравнением этой окружности,

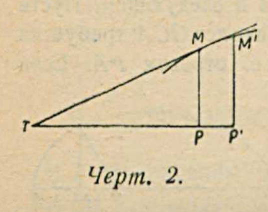


Черт. 1.

центр которой в искомой точке и радиус r, получим из возникающего квадратного уравнения для абсцисс точек M_1 и M_2 два различных корня x_1 и x_2. При совпадении точек C_1 и C_2 в одну, C, корни квадратного уравнения становятся равными, и оно должно принять вид $x^2-2ex+e^2=0$. Из этого условия путем приравнивания частью известных, а частью неопределенных коэфициентов получившихся двух квадратных уравнений находится PA. Конечно, здесь PA проще найти, определив x, как половину коэфициента при x, взятого с обратным знаком. В случае, когда уравнение GCA более высокой степени, уравнение относительно x должно иметь два равных корня, что опять-таки позволяет, применяя метод неопределенных коэфициентов, найти AP. Аналогичную мысль в 1638 г. Декарт применяет к определению положения касательной (подробности см. M. Cantor, „Vorlesungen über die Geschichte der

Mathematik", изд. 2-ое, т. II, стр. 850—856. См. также Oeuvres de Descartes, ed. Ch. Adam et P. Tannery, т. VI, стр. 342 и сл.).

[6]) Сущность метода П. Ферма (Pierre Fermat, 1601—1665), если его передать в современных выражениях, такова. Пусть MT — касательная, $M'(x', y')$ бесконечно близка к $M(x, y)$; $TP = s_t$, $PP' = h$, уравнение кривой: $f(x, y) = 0$. Рассматривая точку M' как лежащую на прямой MT, из подобия треугольников MPT и $M'P'T$ можно получить соотношение между x, y, x', y', s_t, h,



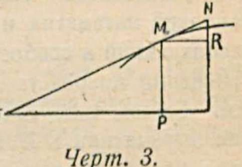
Черт. 2.

именно $s_t = \frac{hy}{y_1 - y}$; последнее вместе с уравнениями $f(x, y) = 0$ и $f(x', y') = 0$ дает зависимость $\varphi(x, y, s_t, h) = 0$, где в случае алгебраических кривых h является множителем во всех членах. Деление на h и отбрасывание членов, в которых он после того остается, позволяют определить подкасательную s_t (см. Oeuvres de P. Fermat, т. III, стр. 122 и Cantor, цит. соч., т. II, стр. 858—861).

[7]) Ордината у Лопиталя называется l'appliquée, абсцисса — la coupée. Оба названия обязаны своим происхождением древней греческой терминологии в учении о конических сечениях. Аполлоний (265?—170) называл параллельные хорды „по порядку проведенными линиями"; латинский перевод Ф. Коммандино (F. Commandino, 1509—1575): ordinatim applicatae; Ферма говорит — appliquée; у Декарта в „Géometrie" — appliquées par ordre; отсюда и произошли термины аппликата и ордината. Аполлониевы отрезки диаметра от точки на кривой до точки пересечения с сопряженными хордами, „отрезки диаметра, отсекаемые по порядку проведенными прямыми", были переведены Коммандино „quae ab ipsis ex diametro ad verticem abscinduntur"; слово „abscissa" значит отсекаемая, так же

как и французское la coupée. (Декарт говорит еще просто „отрезки диаметра“ — segments de ce diametre.) Термин coordinates введен Лейбницем в 1692 г.; слова „ордината“ и „абсцисса“ окончательно получают всеобщее применение в XVIII в.

[8]) И. Барроу (Isaac Barrow, 1630—1677) исходил из рассмотрения треугольников MRN и TPM. Если обозначить $MR = dx$, $NR = dy$, $MP = y$, $PT = s_t$, то прием его заключается в установлении на основании свойств кривой зависимости между dx и dy, причем в вычислениях отбрасываются все члены, содержащие высшие степени или произведения dx и dy. Затем в получившемся уравнении отбрасываются члены, не содержащие dx и dy, совокупность которых равна нулю; далее dx и dy заменяются в нем через s_t и y $\left(\text{ведь } \frac{s_t}{y} = \frac{dx}{dy}\right)$, откуда и определяется s_t. Уравнение кривой при пользовании методом Барроу должно быть приведено к виду целого алгебраического многочлена. Непосредственно „диференцировать“ радикальные выражения и рациональные дроби до открытия алгорифма Лейбница и Ньютона не умели (см. Cantor, цит. соч., т. III, изд. 2-ое, стр. 135—137).



Черт. 3.

[9]) Courbes géometriques, courbes mécaniques (смотри прим. 90).

[10]) Indeterminées.

[11]) Genres. Имеются в виду порядки.

[12]) В дальнейшем слово „difference“ везде, где следует по смыслу, переведено через „диференциал“, а не через „разность“.

[13]) John Craig (ум. 1731) — шотландский теолог и математик. В 1685 и следующих годах опубликовал работы, основывающиеся на применении лейбницевых идей и обозначений. Под влиянием спора о приоритете между Ньютоном и Лейбницем впоследствии (1718) стал употреблять исключительно обозначения метода флюксий (о Крэге см. Cantor, цит. соч., т. III, и Fl. Cajory, „A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse", 1919).

[14]) Ehrenfried Walter von Tschirnhaus (1651—1708) — немецкий математик и физик; известен открытием каустических линий и особого метода упрощения алгебраических уравнений посредством уничтожения некоторых их членов (см. Cantor, цит. соч., т. III или Г. Г. Цейтен, „История математики в XVI и XVII вв.", 1933, пер. П. Новикова, обработка и примечания М. Выгодского).

[15]) Iohann Hudde (1628—1704) — голландский политический деятель и математик, открывший признак существования равных корней алгебраического уравнения, заключающийся в наличии общего делителя у этого уравнения и уравнения, получающегося от умножения членов первого на члены произвольной арифметической прогрессии. Этим же приемом он пользовался при исследовании экстремальных значений и определении касательных (см. гл. X этой книги и прим. 131; также см. Cantor, цит. соч., т. II, Г. Г. Цейтен, цит. соч.).

[16]) Г. В. Лейбниц (1646—1716) этого труда не составил. В переписке с Лопиталем в 1694—1697 гг. он неоднократно возвращается к этой идее и жалуется на перегруженность другими работами, не позволяющими приступить к писанию „De scientia infiniti" (см. Leibniz, „Math. Schr. hsg." v. C. I. Gerhardt, т. II). Первый по времени написания курс интегрального исчисления представляют собой „Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque conscriptae

ad usum illustr. Marchionis Hospitalii" Иоганна Бернулли, составленные им в 1691—1692 гг. для Лопиталя, но опубликованные впервые в 1742 г. в III томе Opera omnia. Их сокращенный немецкий перевод издал G. Kowalewsky в серии классиков Оствальда, № 194, под названием „Die erste Integralrechnung".

[17]) Яков Бернулли родился в 1654 г., умер в 1705 г. Иоганн Бернулли родился в 1667 г., умер в 1748 г.

[18]) Lequel est presque tout de ce calcul.

[19]) La caracteristique.

[20]) Слишком скромная оценка работ И. Ньютона (1642—1727) объясняется тем, что главные его сочинения по методу флюксий долгие годы лежали в рукописях и Лопиталю не могли быть знакомы.

[21]) Bernhard Nieuwentijt (1654—1718) — голландский врач и математик, выступивший в 1694 и 1695 гг. против Лейбница, Бернулли и Лопиталя, упрекая их в отбрасывании величин, не равных нулю, в применении не имеющих, на его взгляд, смысла высших диференциалов и в отсутствии правила для диференцирования общих показательных выражений (вида u^v). Собственная его попытка обосновать анализ не представляет интереса (о ней см. Cantor, цит. соч., т. III). Лейбниц изложил свою контркритику в 1695 г. (Leibniz, „Math. Schr.", т. V, стр. 320 и сл.), где дал известный прием определения du^v с помощью логарифмирования и — в частности — отмечал, что фигуры, составленные из элементов линий, подобны конечным фигурам, так что отношение $\frac{dy}{dx}$ можно заменить отношением конечных величин. В письмах к Лопиталю Лейбниц также довольно подробно останавливается на этом вопросе. Вот некоторые любопытные места из них: „Я получил две книги, опубликованные и посланные мне одним голланд-

ским математиком, некиим г-ном Бернардом Ньювентиитом. Он упрекает вас, сударь, гг. Бернулли и меня за то, что мы применяем наши рассуждения, основанные на исчислении диференциалов, не давая доказательства наших принципов... Он порицает почти всех математиков, работавших над этими вопросами, за то, что они не различали infinite-parvam [бесконечно малого] от nulle [ничто], ибо, по его мнению, для равенства двух величин необходимо, чтобы разность их была равна нулю. Он утверждает, что нашел способ исправить рассуждения геометров; и в основу он кладет положение, что все, что при умножении на бесконечное число не дает обыкновенной величины, есть ничто. Поэтому он считает, что квадраты и произведения [rectangles] бесконечно малых линий вроде $dx\,dx$ или $dx\,dy$ суть ничто и что поэтому их и отбрасывают в исчислении г. Ферма. Поэтому он не желает допустить диферодиференциальные величины вроде ddx... Я отвечу ему в Actes de Leypsic [Acta Eruditorum — *А. Ю.*]... Даже исходя из его собственного принципа $dx\,dx$ и ddx суть величины, ибо при их умножении per numerum infinitum (sed altiorem seu infinities — infinitum) [на бесконечное число (но высшее или бесконечно бесконечное)] они дают обыкновенные величины. Я думаю, сударь, что ваши пояснения и доказательства этого исчисления скоро появятся, на что вы внушаете мне надежду, и что тогда эти жалобы прекратятся. Пока что я отослал его к моим леммам о несравнимых, опубликованным в Actes de Leypsic за февраль 1689 г.; я считаю равными величины, разность которых несравнима. Несравнимыми величинами я называю такие, из которых одна никогда не превзойдет другую, на какое конечное число ее бы ни помножили; т. е. так же, как их понимает Эвклид в пятом определении пятой книги" [„Начал"] [Leibniz, „Math. Schr.", т. II, стр. 287—288; см. также стр. 243—241 („Кто когда-либо слышал, чтобы квадрат количества был ничем")]. Ньювентиит не удовлетво-

рился ответом Лейбница и продолжил свою полемику, в которую вмешались затем другие ученые. Несмотря на остроумие отдельных замечаний, удовлетворительного ответа на основное возражение Ньювентиита (отбрасывание бесконечно малых) Лейбниц не дал.

Эта цитата из Лейбница, в которой он явно выступает сторонником идеи актуально бесконечно малых, интересна здесь в том отношении, что позволяет судить о взглядах самого Лопиталя. Так как в своих письмах он не возражает нигде против „несравнимо малых", то можно считать что Лопиталь тоже принимал или по крайней мере считал допустимыми в математике актуально бесконечно малые. Сам Лейбниц, как известно, высказал ряд различных суждений по этому вопросу и рассматривал бесконечно малые иногда как фиктивное понятие, а иногда определял диференциалы как конечные малые величины.

По вопросу о принципах анализа XVIII в. см. Cantor, цит. соч., тт. III и IV (в последнем статью — G. Vivanti) и мою статью „Идеи обоснования математического анализа в XVIII в." в книге Л. Карно „Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых", 1932.

[22]) Во втором издании „Анализа" (1715) стоит еще „I Partie" — „Часть первая". Второй части Лопиталь не написал.

[23]) Термин „параметр" ввел в теорию конических сечений Кл. Мидорж (Claude Mydorge, 1585—1647); обозначаемый им отрезок равен по величине хорде, проходящей через фокус конического сечения перпендикулярно к оси. В настоящее время, как известно, под параметром кривой второго порядка понимают половину этой хорды.

[24]) La droite — прямая, вообще означает у Лопиталя отрезок. Неограниченная прямая называется у него „droite

indéfinie", а иногда просто „l'indéfinie", что переводится через „неопределенно продолженная прямая" или „бесконечная прямая".

25) Соответствующий постулат у И. Бернулли гласит: „Величина, уменьшающаяся или увеличивающаяся на бесконечно меньшую величину, ни уменьшается, ни увеличивается" (см. Joh. Bernoulli, „Die Differentialrechnung", Ostw. Klassiker, № 211, стр. 11; в дальнейшем при ссылках на это сочинение ставятся инициалы J. B.).

26) Второй постулат И. Бернулли: „Всякая кривая линия состоит из бесконечного множества бесконечно малых прямых" (J. B., стр. 11). Третий постулат J. B. относится к интегральному исчислению, которое должно было служить продолжением курса диференциального, и у Лопиталя, естественно, отсутствует.

27) Ср. J. B., стр. 11, правило I.

28) Ср. J. B., стр. 12, правило 3. У Бернулли также дается сперва вывод для $d\,(xy)$ и $d\,(xyz)$ и затем производится умозаключение по аналогии к случаю любого числа множителей.

В качестве скобок Лопиталь употребляет горизонтальную черту над объединяемым выражением вслед за Декартом и Скаутеном (Fr. van Schooten, 1615—1660); она встречается изредка и у Лейбница, повсеместно — у Ньютона. Фигурные и квадратные скобки встречаются у Виета; круглые ввел Жирар (Albert Girard, 1590?—1632); Лейбниц, как правило, пользуется именно последними.

Нужно иметь в виду, что скобки Лопиталь раскрывает иначе, чем это делают теперь. Именно, выражение $-\overline{a-b}$ означает у него $-a-b$.

29) „Et partant on aura $dx = y\,dz + z\,dy$, et $dz = \frac{dx - z\,dy}{y} = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$, en mettant pour z sa valeur $\frac{x}{y}$".

Лопиталь не обрывает цепи равенств, как это сделали бы мы при переходе от $\frac{dx - z\,dy}{y}$ к $\frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$. Эта особенность изложения, здесь, как и в многочисленных других местах, сохранена — хотя и в ущерб стройности перевода. Однако формулы в переводе не всегда пишутся (как в оригинале) в той же строке, но выключаются. Кроме того, при переносе формул в переводе повторяется соответствующий знак равенства или действия, чего Лопиталь также не делает.

Квадрат y Лопиталь, как и все математики XVIII в., обозначает yy; так поступал еще Гаусс, говоря, что запись a^2 не короче, чем aa.

[30]) Ср. J. B., стр. 13, правило 4. Вывод Бернулли исходит из рассмотрения $\frac{x + dx}{y + dy} - \frac{x}{y}$. В качестве курьеза отмечу поясняющие рассуждения комментария к изд. „Анализа“ от 1768 г.: „Благодаря следующим выкладкам доказательство станет очевидным:

1) $\frac{x}{y} = z$, по предположению.

2) $x = yz$.

3) $dx = z\,dy + y\,dz$.

4) $y\,dz = dx - z\,dy$.

5) $dz = \frac{dx}{y} - \frac{z\,dy}{y}$.

6) $dz = \frac{dx}{y} - zd$ [!! *А. Ю.*].

7) $dz = \frac{dx}{y} - \frac{xd}{y}$.

8) $dz = \frac{y\,dx - x\,dy}{yy}$.

Объяснение

. . . .

4°. Поделив на y четвертое уравнение, получим пятое уравнение, и отбросив в нем уничтожающие друг друга буквы (les lettres qui se détruisent), получим шестое уравнение.

6°. Восьмое уравнение, в глазах всякого знакомого с началами алгебры, то же самое, что и седьмое; значит, если последнее годится (est bonne), то годится и первое" (изд. 1768, стр. 262—263). Такой грубо демагогический и ложный прием убеждения преподносится в середине XVIII в.!

[31]) Puissances parfaites et imparfaites (имеются в виду целые и дробные степени).

[32]) Если $1 : y = y : z = z : x$, то $y = \sqrt[3]{x}$; если $0 - a = a + b = b - 1$, то $a = \frac{1}{3}$.

[33]) Бернулли дает отдельно правило для диференциала целой положительной степени (J. B., стр. 12, правило 2), для отрицательной (J. B., стр. 14) и для диференциала корня (J. B., стр. 15, правило 5), которые Лопиталь, разъяснив смысл отрицательных и дробных показателей, объединяет в одно.

[34]) Пример имеется у J. B., стр. 15. Запись в числителе нижеследующей у Лопиталя дроби обозначает:

$$\frac{a\,dx + 2x\,dx}{3\sqrt[3]{ax + xx}} \cdot \sqrt{xy + yy} -$$

$$- \frac{y\,dx + x\,dy + 2y\,dy}{2\sqrt{xy + yy}} \cdot \sqrt[3]{ax + xx}.$$

Подобные записи имеются в „Géometrie" Декарта.

35) Это определение касательной — классическое в школе Лейбница и у предшествующих математиков. Сам Лейбниц, например, в „Nova methodus" говорит: „Найти касательную — то же самое, что провести прямую, соединяющую две бесконечно мало удаленные точки кривой, или продолженную сторону бесконечно-угольного многоугольника, равнозначащего для нас этой кривой" (Leibniz, „Math. Schr.", т. V, стр. 225, нем. пер. G. Kowalewsky в серии классиков Оствальда, № 162: Leibniz, „Über die Analyse des Unendlichen", стр. 7). И. Бернулли не формулирует определения касательной, но исходит, конечно, при решении задач из той же идеи.

36) Записи вроде $mR\,(dy)\,.\,RM\,(dx)::MP(y)\,.\,PT=\frac{y\,dx}{dy}$ встречаются в книге Лопиталя очень часто. Поставленные в круглые скобки dy, dx, y суть обозначения отрезков mR, RM, MP. Запись $mR\,.\,RM::MP\,.\,PT$ представляет собою геометрическую пропорцию $mR:RM=MP:PT$. Знак равенства $=$ связывает лишь PT и $\frac{y\,dx}{dy}$. Таким образом Лопиталь записывает через $dy\,.\,dx::y\,.\,PT=\frac{y\,dx}{dy}$ то, что теперь записали бы так:

$$dy:dx=y:PT,$$

откуда

$$PT=\frac{y\,dx}{dy}.$$

Самый способ записи обязан происхождением английскому математику Оутреду (Will. Oughtred, 1574—1660), выражавшему равенство отношений величин a, b и c, d через $a\,.\,b::c\,.\,d$. Употребление знака $::$ в пропорциях сохранилось до XIX в. Современная форма записи $a:b=c:d$ или $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ имеется уже у Лейбница, возражавшего

против употребления специальных символов для выражения пропорции, когда для того достаточно принятых знаков = и : .

37) En termes qui seront tous affectés par dy.

38) Для построения касательной Лопиталь определяет отрезок подкасательной. Термин „подкасательная", как указывает в примечаниях к „Диференциальному исчислению" Бернулли P. Schafheitlin (J. B., стр. 51—52), встречается впервые в 1691 г. в письме Гюйгенса к Лейбницу.

39) La nature de l'hyperbole entre les asymptotes.

40) De toutes les paraboles à l'infini.

41) Вывод подкасательной для парабол $a^l x^m = y^n$ имеется у Бернулли (см. J. B., стр. 17).

Параболы любых порядков $y^n = px$, $(n > 0)$ или „параболоиды", т. е. обобщения параболы $y^2 = px$, рассматривались рядом крупнейших математиков XVIII в. Декарт в 1638 г. определил объем и центр тяжести тела вращения, Кавальери (Bonaventura Cavalieri, 1591?—1647) дал в 1647 г. квадратуры для ряда случаев целого n, а Ферма (ранее 1644) и примерно в то же время Торичелли (Evangelista Torricelli, 1608—1647) — для любого рационального. Валлис (John Wallis, 1616—1703) подробно исследовал в 1655 и следующих годах эти кривые и вопрос о проведении касательных.

Подробности см. у Gino Loria, „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte", нем. пер., Leipzig 1902, стр. 251—266. Джино Лориа, между прочим, ошибается, говоря, что „первые ученые, занимавшиеся высшими параболами, не исследовали их формы, предоставив Маклорену заметить, что они обладают различной формой в зависимости от четности или нечетности n" (стр. 255). На самом деле задолго до появления „A treatise

of algebra" Маклорена (Colin Maclaurin, 1698—1746) Лопиталь разобрал этот вопрос для положительных рациональных n в § 88 настоящего сочинения, не устанавливая, правда, порядка прикосновения к оси при $n = 2k$.

Гиперболами высших порядков или „гиперболоидами“ (термин Greg. Fontana), $y^n = px$, где n — отрицательное рациональное число, занимались Ферма и Торичелли, давшие их квадратуры около 1646 г., Валлис, допустивший, между прочим, ошибку при квадратуре, и др.

Маклорен в „Treatise of fluxions“ (2 тома, 1742) исследовал кривые, определяемые уравнением:

$$y = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n},$$

охватывающие, как частный случай, гиперболоиды и параболоиды.

Следует отметить, что в § 13 Лопиталь говорит как об общем уравнении всех гипербол (добавляя „рассматриваемых по отношению к их диаметрам“) об уравнении $\frac{ay^{m+n}}{b} = x^m(a+x)^n$, что привело Лориа к утверждению: „Другие, как маркиз де-Лопиталь..., называли гиперболами кривые $Ay^{m+n} = B(a+x)^m x^n$“ (цит. соч., стр. 266, прим. 2).

Подробности см. Loria, цит. соч., стр. 266—270.

[42]) Кривая $y^3 = axx$ (a стоит для однородности уравнения, хотя вообще Лопиталь, вслед за Декартом, часто полагает $a = 1$, т. е. только подразумевает его), по предложению Валлиса, называется полукубической параболой. Это — первая алгебраическая кривая, для которой была найдена длина дуги. Спрямление ее дали английский математик Нейль (Will. Neil, 1637—1670) около 1658 г., а также голландец Гейрет (Heinrich van Heuraet), Гюйгенс и Ферма. Полукубическая парабола является решением поставленной Лейбницем задачи „определить кривую, обладающую тем свойством, что пробегающая ее точка,

в равные времена приближающаяся к горизонту на равные отрезки, движется по ней равномерно". Решение задачи нашли Гюйгенс (Christian Huyghens, 1629—1695) в 1687 г., Я. и И. Бернулли (1690 и соответственно 1691—1692) (см. Loria, цит. соч., стр. 261).

Ср. проведение касательной к полукубической параболе у Бернулли (J. B., стр. 17).

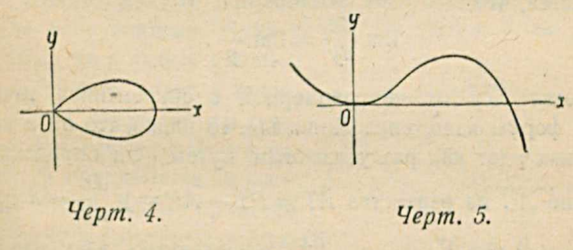
43) Лопиталь рассматривает здесь эллипс с уравнением $y^2 = bx - \frac{b}{a}x^2$ относительно левой вершины (большая ось a, b — параметр в смысле Лопиталя).

44) Термин „продиференцировать" заменяет в переводе часто „взять диференциал" и в данном сочинении, разумеется, не означает нахождения производной.

45) Уравнения $y^{m+n} = \frac{b}{a} x^m (a \mp x)^m$ представляют собой обобщения уравнений эллипса и гиперболы относительно вершины $y^2 = \frac{b}{a} x (a \mp x)$. Дальнейшее обобщение будет $y^m = \frac{b}{a} x^n (a \mp x)^p$.

Впервые некоторые из этих кривых упоминаются в письмах от 1657 и 1658 гг. де-Слюза (René François de Sluse, 1622—1685) к Гюйгенсу; называя их „эллиптоидами", он указывает, что Детонвиль [псевдоним Б. Паскаля (Blaise Pascal, 1623—1662)] именует их perlas. Де-Слюз, по его словам, умел проводить касательные к таким кривым; квадратурами их $\Big($приводящимися к интегрированию функции $x^{\frac{n}{m}} (a \mp x)^{\frac{p}{m}}$, которая интегрируется в конечном виде лишь при целочисленности одной из дробей $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{n+p}{m}\Big)$ занимался Гюйгенс в 1659 г.

Чертеж первой из таких кривых, уравнение которой в декартовых координатах есть $b^2y = x^2(a - x)$, дан был де-Слюзом неверный; он, вероятно, и послужил поводом для наименования их perlas. На самом деле эта кривая имеет другой вид (черт. 5). Характерно для того времени, что и Гюйгенс, правильно вычерчивающий часть кривой в первой четверти, не замечает бесконечности ветвей и присоединяет дугу, симметричную относительно Ox. Касательными и квадратурой этих прямых занимался также ван-Скаутен.



Черт. 4. *Черт. 5.*

В комментариях к „Анализу" Лопиталя указывается, что рассматриваемые им здесь обобщения гипербол и эллипсов представляют собой сечения конусов, направляющими которых служат так называемые круги высших порядков, имеющие уравнения $y^{m+n} = x^m(a - x)^n$ — обобщения уравнения $y^2 = x(a - x)$ (изд. 1768, стр. 281). Круги высших порядков рассматривал в 1740 г. Карачиоли (Caraccioli), (см. Loria, цит. соч., стр. 271—277).

[46]) Разрешив уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

относительно X, получим:

$$X = \frac{dx}{dy}Y + \left(x - y\frac{dx}{dy}\right).$$

Если при $y \to \infty$ и $x \to \infty$ (как в примере Лопиталя), существуют пределы:

$$\lim \frac{dx}{dy} = a, \ \lim\left(x - y\frac{dx}{dy}\right) = b,$$

то асимптота в бесконечно удаленной точке существует; ее уравнение будет:

$$X = aY + b.$$

Далее, при делении $x - y\frac{dx}{dy}$ на y и переходе к пределу, получается, что

$$\lim \frac{dx}{dy} = \lim \frac{x}{y}.$$

Если отвлечься от неправомерной с современной точки зрения формы изложения Лопиталя, то видно, что он в вычислениях идет как раз указанным путем. Он определяет значение AC из равенства $AT = PT - AP = y\frac{dx}{dy} - x$ при бесконечно большом x, а $\frac{dx}{dy}$, необходимое для определения AE, находит из уравнения $ay^{m+n} = bx^m(a+x)^n$ при этом же условии и опираясь на то, что тогда $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$.

Что $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ есть мнимая полуось, следует из того, что a — действительная ось, b — параметр.

Ср. определение касательной и асимптоты к гиперболе $\frac{b}{a} = \frac{bx + x^2}{y^2}$ у J. B., стр. 18—20.

[47]) Лопиталь здесь применяет искусственный прием для нахождения AT ввиду трудности найти его непосредственно, как в предыдущем примере.

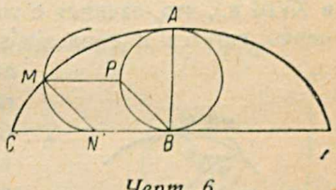
Если заменить $x = -X$, то уравнение кривой примет вид:

$$y^3 + X^3 = -aXy.$$

Это уравнение декартова листа (см. прим. 65).

[48]) В этом параграфе Лопиталь пользуется заданием кривой с помощью уравнения между некоторыми прямолинейными и криволинейными отрезками; именно, за абсциссы выбираются дуги некоторой кривой. Это ему необходимо для получения алгебраической зависимости; при употреблении обычных координат получилось бы — например для циклоиды — трансцендентное уравнение, а между тем Лопиталь пользуется диференцированием лишь алгебраических функций. Аналогично поступал и Ньютон около 1671 г.

Криволинейные координаты ввел Лейбниц в 1692 г „Под координатами, — пишет он, — я разумею не только прямые, но и любые кривые, если только имеется закон, согласно которому при задании определенной точки одной из принятых за координату линий, можно провести некоторую соответствующую этой точке линию, принадлежащую к другой выбранной системе координат“ (Leibniz. „Math. Schr.“, т. V, стр. 265).



Черт. 6.

[49]) Циклоиду Лопиталь называет roulette (сохраняя это название и для более общих кривых, получающихся при качении — без скольжения — одной линии по другой, неподвижной) или cycloide. В переводе термин „рулетта“ сохранен для указанных более общих кривых.

Свойство обыкновенной циклоиды, применяемое Лопиталем, можно доказать так: представим себе образующий круг, проходящий через точку M. Очевидно, что фигура $MPBN$ есть параллелограм (MP параллельна и равна NB). Далее $\smile{PA} = \smile{BPA} - \smile{BP}$ и, так как согласно закону образования циклоиды

$$\smile{BPA} = CB \text{ и } \smile{BP} = \smile{MN} = CN,$$

то

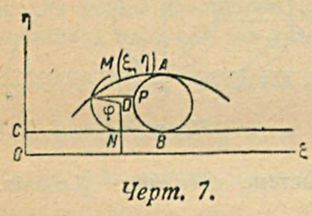
$$\breve{PA} = CB - CN = NB = MP,$$

т. е. в обозначениях Лопиталя

$$v = x.$$

Рассмотрим далее, например, *удлиненную* циклоиду Лопиталя, которая является кривой, называемой теперь обычно *укороченной* циклоидой. Докажем, что наша укороченная циклоида обладает тем свойством, что $\frac{MP}{\breve{PA}} = \frac{b}{a} > 1.$

Пусть $OC = b - a$; представим себе (как часто делали в XVIII в.), что, начиная с точки C, круг радиуса a равномерно катится и скользит по горизонтальной прямой CB, причем при полуобороте круга на π радианов отрезок $CB = \pi b$. Тогда точка движущегося круга, совпадающая в начале с C, опишет укороченную циклоиду. Действительно, ξ, абсцисса точки M, слагается из двух отрезков, один из которых получается от качения, а другой от скольжения круга. Первый, как это легко видеть (вспомним вывод уравнения обыкновенной циклоиды), равен $a\varphi - a\sin\varphi$, второй равен $\frac{\varphi}{\pi} \cdot \pi(b - a) = \varphi(b - a)$.



Черт. 7.

Таким образом

$$\xi = b\varphi - a\sin\varphi.$$

Из чертежа следует также, что

$$\eta = b - a\cos\varphi.$$

Эти уравнения совпадают с параметрическими уравнениями укороченной циклоиды, образуемой при качении (без скольжения) круга радиуса b по прямой $O\xi$ точкой, лежащей внутри окружности на расстоянии a от центра.

Далее, как выше,

$$MP = NB = CB - CN,$$

а

$$CN = \overset{\frown}{NM} + u,$$

где u — отрезок, получаемый от скольжения круга, равный $\varphi(b-a)$. Значит

$$CN = \overset{\frown}{NM} + u = \varphi a + \varphi(b-a) = \varphi b.$$

Следовательно,

$$MP = CB - CN = \pi b - \varphi b = (\pi - \varphi)\, b,$$

и так как

$$\overset{\frown}{PA} = \overset{\frown}{BPA} - \overset{\frown}{BP} = \overset{\frown}{BPA} - \overset{\frown}{MN} = (\pi - \varphi)\, a,$$

то, окончательно,

$$\frac{MP}{\overset{\frown}{PA}} = \frac{b}{a},$$

или

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} > 1.$$

Аналогично, „укороченная“ циклоида Лопиталя есть наша удлиненная, получающаяся, когда образующая точка закреплена на продолжении радиуса катящегося без скольжения круга.

Следует иметь в виду, что образующий укороченную и удлиненную циклоиды круг у Лопиталя не совпадает с тем кругом, который называют теперь образующим.

Если не говорить об отдельных ранних упоминаниях обыкновенной циклоиды, то внимание математиков обращается к ней в XVII в. Современное название ее принадлежит Г. Галилею (Galileo Galilei, 1564—1642). Квадратуру ее дали в 1634 г. Роберваль (Giles Roberval, 1602—1675), называвший ее трохоидой (от греческого τρόχοσ — колесо), а вскоре затем Декарт и Ферма. Несколько позднее, около 1638 г., эти же ученые, а также Торичелли нашли построе-

ние касательной к ней. Спрямление было осуществлено в 1658 г. Хр. Реном (Chr. Wren, 1632—1723), Ферма и ван-Гейретом. Б. Паскаль посвятил, начиная с 1657 г., циклоиде (он назвал ее roulette, от rouler — катить) ряд блестящих работ, где вычисляет площади, образующиеся при проведении прямых, параллельных ее основанию, их центры тяжести, объемы (ими занимался и Роберваль) и центры тяжести тел вращения вокруг оси или основания и т. д. и по существу открывает ряд тригонометрических интегралов. Вскоре были обнаружены замечательные механические свойства циклоиды. Гюйгенс около 1665 г. открыл ее таутохронность (падающая в пустом пространстве по циклоиде тяжелая точка достигает низшего положения в одно и то же время, каков бы ни был начальный пункт падения). Изучение циклоиды привело его к открытию эволют (исследования Гюйгенса были опубликованы в „Horologium Oscillatorium", 1673). И. Бернулли в 1696 г. поставил задачу о брахистохроне (кривой быстрейшего спуска), положившую начало развитию вариационного исчисления; в том же году Ньютон, Лейбниц, И. и Я. Бернулли и Лопиталь показали, что брахистохроной служит циклоида. Первое уравнение циклоиды в декартовых координатах дал Лейбниц (1686) в виде:

$$y = \sqrt{2x - x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$$

(y — отрезки на основании циклоиды, x — перпендикуляры к нему, радиус образующего круга есть 1). Де-Слюз в 1658 г. обобщил понятие рулетт, понимая под этим словом кривые, описываемые точкой, движущейся с равномерной скоростью по линии, в свою очередь равномерно перемещающейся вдоль прямой [см. Loria, цит. соч., стр. 460—478; Cantor, цит. соч., тт. II—III; Г. Цейтен, цит. соч. (см. там в указателях слово „циклоида")].

Ср. определение касательной к обыкновенной циклоиде у J. B., стр. 21—22.

[50]) В этом нетрудно убедиться, записав в декартовых координатах уравнения прямых AQC и BCN в виде $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$. Тогда условие $y^2 = xz$ преобразуется в

$$y^2 = (k_1x + b_1)(k_2x + b_2).$$

Когда CD падает между A и B, то k_1 и k_2 имеют разные знаки и кривая есть эллипс, когда — во-вне, то k_1 и k_2 — одного знака и кривая есть гипербола. Когда точка A удаляется в бесконечность, уравнение прямой AQC будет $y = b_1$; уравнение кривой тогда есть $y^2 = b_1(k_2x + b_2)$, т. е. она является параболой.

[51]) Спираль Архимеда (287—212) — кривая, описываемая точкой, с равномерной скоростью двигающейся по прямой, в свою очередь равномерно вращающейся вокруг неподвижной точки. Уравнение ее в полярных координатах:

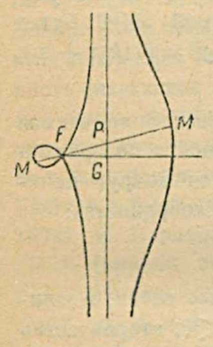
$$\rho = a\omega,$$

где можно принять $a > 0$. Кривая имеет две ветви, в зависимости от того, будет ли $\omega > 0$ или $\omega < 0$; вторая ветвь впервые встречается у Эйлера (Leonhard Euler, 1707—1783) в 1748 г. Касательную и нормаль к этой спирали построил еще Архимед, давший также квадратуру ее завитков. Квадратурой ее занимался Кавальери в 1635 г., сведя ее к квадратуре сегмента параболы. Спрямление ее было сведено к спрямлению параболы независимо друг от друга Кавальери в 1635 г., нидерландским математиком Григорием Сен Винцетом (Gregorius a S-to Vincentio, 1584—1667) в 1647 г., Робервалем, Паскалем и Ферма около 1659 г.

Приводимое Лопиталем уравнение $y = \frac{a}{b}x$ есть по существу уравнение в полярных координатах, впервые введенных Я. Бернулли в 1691 г. (см. прим. 84). Выражение для FT, т. е. $\frac{y^2}{a}\frac{dx}{dy}$, как легко видеть, соответствует фор-

муле подкасательной в полярных координатах, т. е. $\rho^2 \frac{d\omega}{d\rho}$. Для построения касательной здесь проще воспользоваться постоянством поднормали $\frac{d\rho}{d\omega} = a$.

Обобщения спирали Архимеда, спирали высшего порядка, $\rho^n = a\omega$, рассматривал еще в 1636 г. Ферма, исследовавший для них вопрос о проведении касательной, о квадратуре и спрямлении. Этими кривыми занимался в XVII в. также ряд других ученых.



Черт. 8.

См. Loria, цит. соч., стр. 426—438.

Касательная к архимедовой спирали приводится у J. B., стр. 26.

Любопытно, что другая, гиперболическая спираль, $\rho\omega = a$, в современных учебниках и задачниках почти всегда стоящая рядом с архимедовой, открыта была лишь в первом десятилетии XVIII в. Вариньоном (Pierre Varignon, 1654—1722) и И. Бернулли, введшим, между прочим, это ее наименование.

[52]) Если из неподвижного полюса F провести прямые FM, пересекающие данную прямую — основание GP, и от точек пересечения P отложить на этих прямых в обе стороны равные отрезки PM, то концы отрезков M образуют конхоиду (κόγχη — раковина) Никомеда (греческий геометр, около 180 г. до н. э.). В XVII в. знали обе ветви кривой. Пусть F — полюс, FG — полярная ось, $PM = b$, $FG = a$; тогда уравнение конхоиды в полярных координатах будет:

$$\rho = \frac{a}{\cos\omega} \pm b,$$

в декартовых оно имеет вид:

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) - b^2 x^2 = 0.$$

В зависимости от выполнения одного из условий $b \gtreqless a$, вторая (левая ветвь) принимает разный вид, имея в полюсе узел, заострение или изолированную точку. Построение касательной к конхоиде около 1636 г. дали Декарт, Ферма и Роберваль. Гюйгенс (письмо к Скаутену от 1653) определил точки перегиба и (1658—1659) отметил бесконечность площади между правой ветвью и основанием. Квадратура конхоиды дана И. Бернулли в 1691—1692 гг.

См. Loria, цит. соч., стр. 128—133.

Соответствующая задача имеется у J. B., стр. 22.

[53]) Пусть уравнение кривой MA есть $y = f(x)$. Выберем прямую, вдоль которой перемещается точка A, за ось абсцисс, а перпендикуляр к ней из F — за ось ординат. Пусть ордината F есть y_0, начальная абсцисса A есть x_0. Тогда уравнения кривой MA и прямой FA при перемещении A на отрезок a будут:

$$y = f(x + a),$$

$$\frac{y}{y_0} + \frac{x}{x_0 + a} = 1.$$

Исключение из них параметра a дает уравнение искомой кривой CMD. Очевидно, что способ получения кривой CMD связан со способом образования конхоиды.

Утверждения Лопиталя относительно гиперболы и конхоиды проверить совсем легко. Случай, когда AM есть парабола, рассмотрел Декарт в „Géometrie“ (так же как случай, когда она прямая). Если взять уравнение $y^2 = 2px$ (у Декарта взято несколько иное), то CMD будет иметь уравнение третьего порядка:

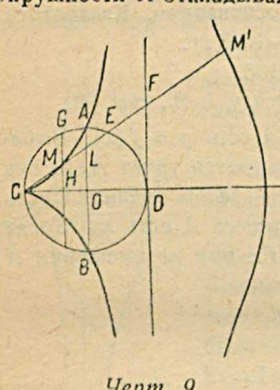
$$\frac{y^2(y - y_0)}{2p} - (x - x_0)(y - y_0) + xy_0 = 0.$$

Линия имеет две отличные ветви, соответственно двум точкам пересечения прямой и параболы. Их называли „декар-

товой параболой“ или „параболическими конхоидами“ или каждую „сопровождающей кривой параболоиды Декарта“.

См. Loria, цит. соч., стр. 50—51; Г. Г. Цейтен, цит. соч. стр. 206—207.

[54]) В плоскости дан круг с центром O и проведены два взаимно перпендикулярные диаметра AB и CD. От точки окружности A откладываются на ней по обе стороны произвольные, но равные дуги AG и AE, проводятся GH параллельно AB и прямая CE; геометрическое место точек пересечения линий GH и CE будет циссоидой Диоклеса (греческий математик, около 180 г.? до н. э.; слово κίσσος означает плющ). Из чертежа видно, что $CM + CE = 2CL$; это свойство циссоиды, сохраняющееся и для точек вне круга, Лопиталь и выражает в виде уравнения $z + y = 2x$. Бесконечность ветвей отмечена, повидимому, лишь в XVIII в. Роберваль писал о ней Ферма в 1640 г.; древние знали лишь часть кривой внутри круга.



Черт. 9.

Так как $CE = MF$ (DF — касательная к кругу), то точки циссоиды получатся, если на отрезках CF откладывать влево $FM = CE$. При отложении отрезков $FM' = CE$ вправо получается кривая, называемая „сопровождающей циссоиды“. Другое определяющее свойство циссоиды состоит в том, что $CM = EF$.

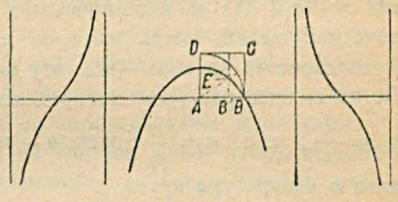
Декартово уравнение циссоиды приводит Лопиталь; в полярных координатах (C—полюс, CD—полярная ось) оно будет:

$$\rho\ (= CF - CE) = \frac{2a \sin^2 \omega}{\cos \omega},$$

где $2a$ — диаметр круга.

Касательную к циссоиде построили Ферма и Роберваль около 1636 г. Площадь между циссоидой и асимптотой Ферма дал в 1662 г.; эту же площадь, ее центр тяжести, объем тела вращения нашли Гюйгенс в 1658 г. и — по его предложению — Валлис в 1659 г., Ньютон, придававший циссоиде большое значение в построениях, занимался ее спрямлением, И. Бернулли (уже в XVIII в.) — ее квадратурой и объемами тел вращения.

См. Loria, цит. соч., стр. 36—45; Cantor, цит. соч., т. II. Соответствующая задача имеется у J. B., стр. 23.



Черт. 10.

[55]) В некий квадрат вписана четверть круга. Пусть прямая AB с равномерной скоростью вращается вокруг точки A, а прямая BC равномерно перемещается параллельно самой себе вдоль BA, так что с AD обе они совпадают одновременно. Геометрическое место точек E пересечения этих движущихся прямых есть квадратриса Динострата (греческий геометр IV в. до н. э.). Название ее связано с тем что она служила для решения задачи о квадратуре круга (об этом см. Г. Г. Цейтен, „История математики в древности и в средние века", 1932, перевод П. С. Юшкевича, стр. 62—64).

Если сторона квадрата есть r, угол EAB есть ω, AB — полярная ось и A — полюс, то

$$BB' = \frac{2\omega}{\pi} r, \quad AB' = r\left(1 - \frac{2\omega}{\pi}\right)$$

и

$$\rho = AE = \frac{AB'}{\cos\omega} = \frac{r}{\cos\omega}\left(1 - \frac{2\omega}{\pi}\right).$$

Уравнение Лопиталя $y = \frac{b}{a} x$ образуется из этого урав-

нения путем элементарных преобразований. Далее, если положить $\pi - 2\omega = \varphi$, полярное уравнение примет вид:

$$\rho = \frac{2r}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\sin \varphi}$$

При переходе к декартовым координатам будет:

$$y = x \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2r}.$$

Эта трансцендентная кривая состоит из бесчисленного множества ветвей, пересекающих ось абсцисс в точках $\pm(2n+1)r$ и напоминающих тангенсоиды, и параболической ветви, часть которой внутри квадранта круга была известна древним (всю эту ветвь открыл Роберваль). Легко видеть, раскрыв неопределенность, что при $x_0 = 0$, $y_0 = \frac{2r}{\pi}$, т. е. $\pi = \frac{2r}{y_0}$; отсюда — применение кривой к задаче о квадратуре круга.

Касательная к квадратрисе была построена Робервалем (1636), Ферма, Барроу (1670) и др. Площадь и длина кривой были выражены в виде бесконечных рядов Ньютоном в письме к Ольденбургу от 1676 г., известном и Лейбницу.

См. Loria, цит. соч., стр. 410—426. Соответствующая задача имеется у J. B., стр. 24; следствие § 31 см. у J. B., стр. 26.

[56]) Dont je suppose que l'un des membres soit zero.

[57]) В 1686 г. Чирнгауз выпустил книгу по логике, „Medicina mentis“, где в качестве примера рассматривал линии, образуемые с помощью точек-фокусов и закрепленных в них или свободно огибающих их нитей. Простейшие случаи — круг и эллипс; при нескольких, скажем, при m, фокусах концы нити закрепляются в двух из них, а вокруг $m-2$ точек нити обводятся свободно, так что от этих точек к точкам кривой проходит по две нити. Кривая образуется при движении карандаша, натягивающего нить, как в нитяном построении эллипса.

Фокусы точек можно заменить самими фокусными линиями. Чирнгауз дал неверное построение нормали и касательной, исправленное Фацио в 1688 г. Кроме того, Фацио указал, что если b, c, d суть фокусы (трехфокусной) линии, m — точка на ней и кривая обладает тем свойством, что длина нити

$$L = \varkappa \cdot mb + \lambda \cdot mc + \mu \cdot md;$$

если, далее, из m как центра произвольным радиусом описать окружность, пересекающую mb в f, mc в g, md в h и в f, g, h поместить веса, относящиеся, как $\varkappa$, λ, μ, то линия nm, где n — центр тяжести весов, нормальна к кривой. Предложение это доказал тогда же Гюйгенс, переписывавшийся с Фацио. „Medicina mentis" в исправленном виде вышла снова в 1695 г.; переиздавалась и позднее.

Фацио (Nicolas Fatio de Duillier, 1664—1753), швейцарец по рождению, проживавший с 1687 г. в Англии, известен тем, что первый дал в 1699 г. толчок спору о приоритете между Лейбницем и Ньютоном.

Подробности см. Cantor, цит. соч., т. III, особенно стр. 152—155.

58) Здесь вместо слова произведение (produit), которое Лопиталь также употребляет (§ 6, 7), говорится „rectangle"; этот геометрический термин восходит еще к греческой математике.

59) Это легко доказать, пользуясь декартовыми координатами, взяв n точек $M_i(x_i, y_i)$ с весами P_i, выбрав за начало координат их центр тяжести

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x_i P_i}{n} = 0, \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y_i P_i}{n} = 0$$

и выразив сумму квадратов расстояний точки M окружности $x^2 + y^2 = r^2$ до этих точек, помноженных на соответствующие веса.

[60]) Как известно, всякое коническое сечение обладает тем свойством, что e, отношение расстояния его точек до фокуса и до прямой — директрисы, постоянно; при этом $e < 1$ у эллипса, $e > 1$ у гиперболы, $e = 1$ у параболы. Доказательство можно найти в любом учебнике аналитической геометрии.

[61]) При постоянстве подкасательной

$$y\frac{dx}{dy} = k$$

интегрирование дает:

$$\ln\frac{y}{a} = \frac{x}{k}\cdot$$

или

$$y = ae^{\frac{x}{k}}.$$

„Логарифмика" Лопиталя есть, таким образом, логарифмическая кривая или график показательной функции, если переменить ролями переменные.

Связь с площадью гиперболы $z = \frac{c^2}{y}$ получается сразу же; так как $s = t$, то $\int \frac{c^2}{y}dy = cx$ (оставляя по образцу того времени постоянную интеграции в стороне и не записывая результат в виде $c^2 \ln y$, поскольку этого знака нет еще у Лопиталя).

У J. B., стр. 21, имеется обратная задача, выходящая за пределы диференциального исчисления; требуется определить кривую с подкасательными постоянной длины. Шафхейтлин (см. J. B., стр. 52) справедливо указывает, что лопиталева трактовка задачи, приспособленная к назначению его „Анализа", лишний раз подтверждает, что записки Бернулли послужили основой книги Лопиталя. Шафхейтлин не отмечает, однако, что в X главе „Лекций по интегральному

исчислению" И. Бернулли также имеется эта обратная задача, причем в ней дается построение логарифмической кривой на основании приравнивания площадей гиперболы и прямоугольников на некоторой прямой, т. е. как раз построение, служащее исходным пунктом задачи Лопиталя. Эти лекции были составлены, как говорилось, для Лопиталя; Бернулли их потом издал в 1742 г. безусловно почти неизмененными, ибо сохранил ошибки и пробелы в решениях, которые давно тем временем были уже исправлены и заполнены (см. об этом примечания G. Kowalewsky в нем. изд., стр. 166 и 168).

Ввиду того, что наличие этого построения у Бернулли, с одной стороны, снова показывает, насколько значительно было фактическое значение его работ для книги Лопиталя, а с другой стороны, косвенно подтверждает правильность отнесения „Лекций по интегральному исчислению" к 1692 г., я приведу небольшой отрывок оттуда (см. черт. 11):

„Ищется природа кривой BDC, подкасательная которой всегда равна постоянной a. По предположению

$$dy : dx = y : a,$$

откуда

$$y\,dx = a\,dy$$

и

$$dx = \frac{a\,dy}{y}.$$

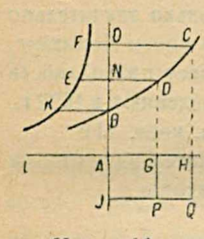
Если с обеих сторон помножить на a, то получится:

$$a\,dx = \frac{a^2dy}{y}.$$

Чтобы построить кривую, проведем неограниченно продолженные перпендикуляры BI, BH и у всех AB, AN, AO и т. д. равных y, положим KB, NE, OF и т. д. равными $a^2 : y$. При этом получится гипербола KEF, асимптотами которой являются AO, AL. Далее, положим у AG, AH и т. д. GH,

HQ и т. д. равными a; тогда IPQ будет прямой, параллельной AH. Если затем взять гиперболическую площадь KN равной прямоугольнику AP, а KO равной AQ, то точки встречи D, C и т. д. будут лежать на искомой кривой. Таким образом, если AG, AH и т. д. суть арифметические пропорциональные, то AB, AN, AO и т. д. будут геометрическими пропорциональными, так как площади KN, EO и т. д. должны быть равны. Следовательно, кривая BDC — логарифмическая" (указ. изд., стр. 40—41).

Постоянство подкасательной кривой заметили Торичелли (1644) и Гюйгенс (1690), назвавший последнюю логарифмикой („показательная кривая" — термин Лейбница). Теоремы о квадратуре площадей между логарифмикой и асимптотой и о кубатуре тела вращения также принадлежат первым двум названным ученым; часть из них позднее (1698) нашел Дж. Крэг. Спрямление ее, приводящее к логарифмам, на что указал в письме к Лейбницу Лопиталь (1692), было независимо от него дано Гюйгенсом (1693) и англичанином Р. Котсом (Roger Cotes, 1682—1716), автором работ по интерполированию и знаменитой формулы, записываемой ныне в виде:



Черт. 11.

$$i\varphi = \ln(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и именуемой формулой Эйлера.

См. Loria, цит. соч., стр. 542—550.

[62]) Впервые логарифмическая спираль была описана в 1638 г. Декартом, определявшим ее как кривую $ANBCD$, у которой отношение дуг ANB, $ANBC$, $ANBCD$ к прямолинейным отрезкам AB, AC, AD постоянно. При этом он отмечал, что отрезки AB, AC, AD образуют с касательными к кривой в их концах B, C, D один и тот же угол.

Записав уравнение спирали в виде:

$$s = k\rho$$

(s — длина, ρ — радиус-вектор) и диференцируя, получим:

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2} = k\, d\rho,$$

откуда после преобразований находится интегрированием уравнение в полярных координатах:

$$\rho = Ce^{\frac{\omega}{\sqrt{k^2-1}}}.$$

Угол между радиусом-вектором и касательной определяется по формуле $\operatorname{tg} \mu = \rho \frac{d\omega}{d\rho}$; в данном случае $\operatorname{tg} \mu = \sqrt{k^2 - 1}$.

Два отличных от предложенного Декартом способа образования логарифмической спирали дал Торичелли, нашедший также ее квадратуру и ректификацию (первая ректификация кривой линии). Ею занимались также Валлис, Барроу и особенно детально Я. Бернулли (1691—1692), изучивший ее эволюту, каустики и т. д.

В комментарии к „Анализу" Лопиталя (изд. 1768, стр. 315—317) рассматриваемая кривая определяется следующим образом. Четверть окружности делится на равные дуги, в концы которых A, B, C проводятся радиусы OA, OB, OC; на радиусах откладываются отрезки OA', OB', OC', ..., образующие геометрическую прогрессию. Концы A', B', C', ... лежат на логарифмической спирали (из ее уравнения легко видеть, что когда ω образуют арифметическую прогрессию, то ρ дают геометрическую).

Подробности см. у Loria, цит. соч., стр. 448—457. Лориа указывает (стр. 449), что термин „логарифмическая спираль" ввел Вариньон в 1704 г.; однако, видимо, оно встречается ранее, — по крайней мере у Лопиталя в 1696 г.

[63]) Здесь имеется в виду рулетта в общем смысле слова (см. прим. 40). Исследованием этих кривых занимались в начале и первой трети XVIII в. французские математики Лагир (Philippe de la Hire, 1640—1718) и Николь (François

Nicole, 1683—1758). Свойство, доказываемое Лопиталем, было установлено Гюйгенсом (опубликовано в 1673 г.).

64) Некоторые частные исследования геометрических экстремумов произвели еще греческие математики; встречаются они и в средние века и в начале нового времени. Кеплер (Joh. Kepler, 1571—1630) в замечательном исследовании объемов тел вращения („Stereometria doliorum", 1615) отмечал, что около максимума изменения величины незаметны; аналогичную идею, впрочем, высказывал еще средневековый французский математик Орезм (Nicole Oresme, 1323?—1382). Первый методический прием разыскания наибольших и наименьших значений дал в 1638 г. Ферма, владевший им примерно с 1629 г. Он подставлял в исследуемое выражение вместо неизвестного A сумму $A+E$, приравнивал оба получившихся выражения, после уничтожения одинаковых членов сокращал на E и затем отбрасывал все члены, еще содержавшие E. Получившееся уравнение, которое, очевидно, соответствует нашему

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=0$$

($E=\Delta x$, $A=x$), дает значение A, при котором величина может иметь экстремум. Гудде (1658) умножал члены исследуемого выражения на члены произвольной арифметической прогрессии и результат [в том случае, когда прогрессия есть 0, 1, 2, ..., n, где n — степень исследуемой $f(x)$, он совпадает с $xf'(x)$] приравнивал нулю. Доказательства своего правила Гудде не привел. Приемы Ферма и Гудде применялись лишь к целым алгебраическим функциям и не содержали признаков, отличающих максимум от минимума. Гюйгенс в 1693 г. несколько развил эти приемы, распространив их на рациональные алгебраические выражения.

Ньютон в „Methodus fluxionum" (написан в 1671 г., опубликован в 1736 г.) разбирает задачу об определении экстремума очень сжато, давая обычное правило и два

примера, и указывает, что правило Гудде вытекает из его собственного, более общего, так как оно справляется с иррациональностями.

Решительный шаг вперед сделал Лейбниц в „Nova methodus“, т. е. в 1684 г. Он указывает на зависимость между убыванием и возрастанием функции и знаком ее диференциала dv, на наличие при экстремуме равенств $dv = 0$ или $\frac{dv}{dx} = \infty$. Знак d^2v служит у него для отличения вогнутости от выпуклости.

Случай, когда при экстремуме исчезают первые n производных, исследовал первым К. Маклорен в 1748 г. Эйлер в 1755 г. рассмотрел, хотя и не исчерпывающим образом, экстремумы функций нескольких переменных, до того встречавшиеся лишь спорадически, и некоторые особенности экстремумов функции, когда производная не обращается в нуль.

Лопиталь в отдельных задачах не производит исследования характера экстремума и не проверяет его существования, но теорию развивает довольно подробно. Вторым диференциалом он здесь не пользуется и вводит его лишь в следующей главе о точках перегиба и возврата.

Крайне неудачное утверждение, что диференциал dy при экстремуме может быть равен бесконечности, что, вообще говоря, неверно и что противоречит определению dy как бесконечно малой величины, Лопиталь исправляет в § 47, говоря, что тогда равно бесконечности отношение ординаты к подкасательной, т. е. $\frac{dy}{dx}$.

Вывод условий экстремума отличен здесь от бернуллиевого (J. B., стр. 27—28). Бернулли сперва основывается на параллельности касательной и оси, бесконечности подкасательной и равенства $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{s_t}$, откуда $\frac{dy}{dx} = 0$ (эти обстоятельства у Лопиталя изложены в § 47).

[65]) Эта кривая, известная с XVIII в. под названием декартова листа, впервые встречается у Декарта. Незнакомство со знаками координат обусловило вначале неправильное представление о форме линии; верно вычерчивалась лишь листообразная часть ее в первом квадранте плоскости; о бесконечности ветвей ее не знали. Последнюю установил, повидимому, Гюйгенс в 1691 г., определивший вместе с тем асимптоты кривой; Лопиталю она тоже известна (см. § 14). Квадратура кривой дана И. Бернулли в его лекциях по интегральному исчислению (нем. изд., стр. 24—26), что, может быть, побудило Лопиталя обратить на нее внимание. Касательную построили Ферма (1638), Барроу (1669).

См. Loria, цит. соч., стр. 51—57. В сноске 13 на стр. 53 Лориа говорит, что Лопиталь (изд. 1768, стр. 59) называет лист „Paraboloide de M. Descartes". Это неверно; на стр. 59 о листе речи нет, а название „Paraboloide" употребляется на стр. 31 и вполне правильно. Там же у Лориа опечатки в указаниях страниц книги Лопиталя, где говорится о листе (9 вместо 19, 243 вместо 234).

[66]) В знаменателе a^2 стоит снова для однородности (ср. прим. 34).

[67]) Отношение $GL:GI$, в силу наличия общей гипотенузы, равно отношению синусов указанных углов. Выражение тригонометрических величин через отвлеченные числа вообще — дело второй половины XVIII в., в особенности Эйлера. До того под синусом, например, понимали соответствующую линию — катет, — при данном угле имеющую различную длину, в зависимости от величины выбранного за основу радиуса (гипотенузы), называвшегося полным синусом (sinus totus).

Словом „коэфициент" переведено „les quantités qui multiplient" (dz или du). Термин „коэфициент" (longitudo coëfficiens) имеется у Виеты для обозначения множителя в члене уравнения, вводящегося для однородности последнего и придающего этому члену надлежащее число измерений.

68) Чертеж Лопиталя неудачен и может привести к мысли, что $\angle CGE = \angle FGE = d$. Это привело комментатора издания 1768 г. к ошибке. Он пишет: „§ 58, стр. 69, изложен, на мой взгляд, с меньшей точностью, чем другие; доказательства, которые я могу тому привести, к сожалению, слишком очевидны.

1°. Так как $\angle FEG = \angle CEG$ (черт. 42) углы при G — прямые и сторона GE — общая у обоих треугольников FGE и CGE, то эти треугольники следовало бы сделать вполне одинаковыми. Этот недосмотр бросается в глаза внимательному и аккуратному читателю.

2°. Если предположить, что угол FEG должен быть равен углу CEG, то задача решается очень легко. Искомая точка E является точкой, через которую проходит радиус круга AEB, пересекающий по продолжении линию CF, соединяющую обе данные точки под прямым углом. Поэтому нет нужды искать эту точку с помощью пересечения круга и гиперболы“ (изд. 1768, стр. 325—326).

Виноват чертеж; действительно, если углы при G — прямые, то $CG = GF$ и $CO = OF$, и тогда определение точки E абсолютно элементарно. Но Лопиталь не стал бы решать такую простую задачу столь сложным путем. У него $CG \neq GF$ (ведь $b \neq a$) и углы при G вовсе не прямые, в противоположность чертежу.

69) Sont égaux et semblables entr'eux.

70) В оригинале: En ôtant les fractions, et ordonnant ensuite l'égalité. Запись вида $\begin{matrix} a^2 \\ -b^2 \end{matrix} x^4$ означает $(a^2 - b^2)\,x^4$; она встречается у Декарта и Гэрриота (Thomas Harriot, 1560—1621) и заменяет скобки.

71) En ôtant les incommensurables.

72) Эта задача имеется у J. B., стр. 30; Бернулли посредством диференцирования выражения для времени приходит к тому же уравнению. Аналогичная задача рассматри-

валась Лейбницем в „Nova methodus". На прямой SS требуется разыскать такую точку F, чтобы сумма $r \cdot EF + h \cdot CF$ (E и C — точки, лежащие по разные стороны прямой, r и h — постоянные) была минимумом; Лейбниц дает оптическую интерпретацию задачи (h, r — плотности сред, разделенных прямой SS); ход решения у него вначале таков же, как у Бернулли и Лопиталя, но он не составляет уравнения четвертой степени, а применяет результат диференцирования к выводу закона, что синусы угла падения и преломления относятся обратно пропорционально плотности сред (ср. статьи, изданные G. Kowalewsky, стр. 9—10).

[73]) Ср. J. B., стр. 32. В манускрипте лекций Бернулли получающееся кубическое уравнение оставлено нерешенным.

[74]) Задача об определении дня кратчайших сумерек, как сообщал И. Бернулли в Journal des Sçavans от января 1693 г., занимала его и брата Якова в течение 5 лет. Он приводит там лишь результат решения, сформулированный в тех же словах Лопиталем в предпоследней фразе решения (см. Joh. Bernoulli, „Opera omnia", т. I, стр. 64). Время публикации сообщения Бернулли и наличие той же задачи у J. B. (стр. 33) лишний раз подтверждают зависимость Лопиталя от Бернулли и справедливость отнесения составления оригинала конспекта швейцарского математика к 1692 г. Устарелая терминология и тяжесть изложения Бернулли, на которое указывает Шафхейтлин (J. B., стр. 54—55), свидетельствуют о том же.

Задачей этой заканчивается как у Бернулли, так и у Лопиталя отдел об экстремумах.

[75]) Еще Ферма около 1640 г. указал, что в точке перегиба угол касательной с осью имеет максимальное или минимальное значение. В 50-х годах XVII в. этим вопросом занимались Гюйгенс, Скаутен, определявший место перегиба как точку слияния трех точек пересечения кривой и

прямой, де-Слюз, Гудде, опиравшийся, вероятно, на мысль, что из точки перегиба исходят две совпадающие касательных, и др. В „Methodus fluxionum“ Ньютон дал правило нахождения „точки прямизны“ (punctum rectitudinis) с помощью приравнивания нулю второй флюксии, т. е. второй производной. Лейбниц в „Nova methodus“ утверждал, что в точке перегиба $ddv = 0$, причем, несколько неудачно выражаясь писал, что точка перегиба (punctum flexu contrarii) имеется тогда, когда „ни v, ни dv не равны нулю, а ddv равен нулю“. На самом деле v и dv могут быть равны нулю в точке перегиба, хотя это и не признаки ее наличия. На перемену знака ddv Лейбниц также указывает. Для кривой, заданной в полярных координатах, точки перегиба изучал в 1692 г. Я. Бернулли, основываясь при их определении на том, что отрезок, отсекаемый касательной на неподвижной оси, должен быть для касательной в точке перегиба наименьшим.

Подробности см. Г. Г. Цейтен, цит. соч., ч. II, и Cantor цит. соч., т. III.

Определение точек перегиба у И. Бернулли гласит: „Существуют некоторые кривые, обладающие двойной кривизной, а именно сперва вогнутые по отношению к оси, а затем выпуклые, или наоборот, сперва выпуклые, а затем вогнутые; точка, отделяющая эти два изгиба, являющиеся концом первого и началом следующего, называется точкой перегиба“ (J. B., стр. 38).

Точки возврата, о которых говорит Лопиталь в этой главе, — первого рода; в них ветви кривой располагаются по разные стороны от касательной. В „Диференциальном исчислении“ Бернулли они не встречаются. И. Бернулли в 1695 г. сообщил Лейбницу, что переписывался ранее с Лопиталем по вопросу о наличии точек возврата у кривых вроде полукубической параболы. Так как корреспонденция Лопиталя и Бернулли полностью не была опубликована, то судить о размерах влияния последнего на первого в данном слу-

чае трудно; но в пользу больших размеров этого влияния говорят все общие соображения, высказанные выше. Название точек перегиба у Лопиталя, points des rebroussement, принадлежит, повидимому, И. Бернулли.

Точки возврата встречаются, между прочим, в „Traité de la lumière" Гюйгенса (составл. около 1678 г., напечат. в 1690 г.); в известных случаях, именно, световые волны имеют форму соприкасающихся выпуклостями кривых (см. конец VI гл. „О форме прозрачных тел, служащих для преломления и отражения").

[76]) Замечания Лопиталя относительно точек перегиба неполны; он ограничивается использованием второго диференциала, не рассматривая того случая, когда обращается в нуль ряд высших производных, или диференциалов. Первое детальное исследование особых точек кривых содержится в Introductio in analysin infinitorum Эйлера (1748). Здесь он, перенеся начало координат в исследуемую точку $M(p, q)$ с помощью формул $x = p + t$, $y = q + u$, записывает уравнение кривой в виде:

$$At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \ldots = 0$$

и рассматривает случай, когда A и B в точке M равны нулю. Уравнение принимает, вообще говоря, вид:

$$Ct^2 + Dtu + Eu^2 + \ldots = 0;$$

точка M — двукратная. Кривая в соседстве с ней имеет форму кривой

$$Ct^2 + Dtu + Eu^2 = 0$$

(отбрасываются члены с высшими степенями t, u); если $D^2 - 4CE < 0$, то M—изолированная точка; если $D^2 - 4CE > 0$, то—двойная, в которой кривая имеет две различные каса-

тельные, если $D^2 - 4CE = 0$, то обе эти касательные совпадают, и кривая имеет, вообще говоря, точку возврата. В случае $C = D = E = 0$ точка M будет кратности больше двух и т. д. Условия Эйлера $D^2 - 4CE \gtreqless 0$ ныне для кривой $f(x, y) = 0$ запишутся в виде:

$$(f''_{xy})^2 - f''_{xx} f''_{yy} \gtreqless 0.$$

Термин „особые точки" (points singuliers) введен был в 1740 г. французским математиком де-Гюа де-Мальвом (Jean Paul de Gua de Malves, 1712—1785).

Второй вывод правила, основывающийся на перемене знака ddy при возрастании абсцисс, явно неприменим к точкам возврата, в соседстве с которыми ордината имеет два значения.

Вывод правила для определения точек перегиба у И. Бернулли для декартовых координат по сути тот же; но он дает два правила, которые, как, повидимому, заметил Лопиталь, совпадают (см. J. B., стр. 38—39).

Подробности об особых точках 2-го порядка и признаках их существования см. у Ш. Ж. Валле-Пуссен, „Курс анализа бесконечно малых", 1933, т. II, § 316 и сл.

77) Последняя пропорция $MR : TH = TH : HO$ получается из $mR : RM = TH : HO$. При чтении этой цепи пропорций не следует упускать из виду, что знак равенства относится лишь к непосредственно соединяемым величинам $\left(\text{т. е., например, } BT = y\frac{dx}{dy}\right)$, а не к отношениям $BM.BT$ и т. п.

78) Результат, полученный здесь Лопиталем, несколько отличается по виду от ныне употребляемой формулы.

Если обозначить y через ρ, dx через $\rho\,d\omega$, то

$$s_t = BT = \frac{y\,dx}{dy} = \frac{\rho^2\,d\omega}{d\rho}.$$

При диференцировании ($d\omega$ — постоянно) получается:

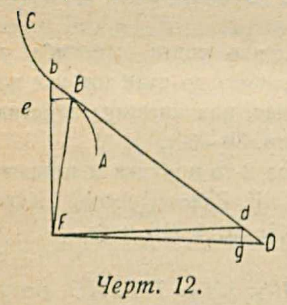
$$ds_t = Ht = \frac{2\rho\,d\omega\,d\rho^2 - \rho^2\,d\omega\,d^2\rho}{d\rho^2},$$

$$Ot = OH + Ht = \frac{\rho^3\,d\omega^3 + 2\rho\,d\omega\,d\rho^2 - \rho^2\,d\omega\,d^2\rho}{d\rho^2}.$$

Приравнивая эту дробь нулю и сокращая на $\rho d\omega$, получим известное условие точек перегиба в полярных координатах:

$$\rho^2\,d\omega + 2d\rho^2 - \rho\,d^2\rho = 0.$$

Так как Лопиталь берет при диференцировании постоянным $dx = \rho\,d\omega$, то он получает отличную формулу, в которой ddy не совпадает с $dd\rho$, соответствующим $d\omega$ = const. (Сравнение формул показывает, что $ddy - dd\rho = -\frac{d\rho^2}{\rho}$).



Черт. 12.

Вывод И. Бернулли несколько отличен. Тогда как Лопиталь берет две соседние касательные, Бернулли рассуждает так (J. B., стр. 44—45). Пусть B — точка перегиба. Из полюса F проводятся прямые FB, Fb, образующие бесконечно малый угол BFb; затем восстанавливаются перпендикуляры к ним FD, Fd. Касательная в точке перегиба Bbd является одновременно касательной в точке b (именно в силу того, что B — точка перегиба, где касательные в двух бесконечно близких точках совпадают; ср. § 67 Лопиталя). Из центра F описываются дуги Be, gd и вводятся обозначения $FB = Fb = z$, $FD = Fd = t$, $Be = dy$; тогда $be = dz$, $gD = dt$.

Из подобия секторов eBF и dFg, $\triangle beB$ и $\triangle dgD$ следует, что

$$FB : Fd = Be : gd \text{ и } be : Be = qd : gD,$$

откуда

$$gd = \frac{t\,dy}{z} \text{ и } \frac{t\,dy^2}{z} = dz\,dt.$$

Далее (в силу подобия $\triangle bFd$ и $\triangle beB$, где eB рассматривается как прямая):

$$Fd : Fb = Be : be,$$

т. е.

$$t : z = dy : dz.$$

Следовательно,

$$dy^3 = dz^2\,dt.$$

Имея в виду, что $dy = \rho\,d\omega$, $z = \rho$, $t = \frac{-\rho^2\,d\omega}{d\rho}$, легко получить отсюда известное условие точки перегиба.

[79]) Совпадение около точек перегиба двух бесконечно близких касательных, отмечаемое, как сказано, и Бернулли, соответствует тому, что близ перегиба расстояние точек кривой от точек касательной есть бесконечно малая 3-го порядка, а не 2-го, как это случается в обыкновенных точках (при разложении по формуле Тейлора разность ординаты кривой Y и ординаты касательной y будет $Y - y = \frac{h^3}{3!} f'''(x + \theta h)$, в силу того, что $f''(x) = 0$; $|\theta| < 1$, h — бесконечно малое приращение). Между прочим, раз эти касательные совпадают, Лопиталю следовало бы предпочесть вывод условия точек перегиба Бернулли (см. предыдущее примечание). Инфинитезимальный смысл утверждения относительно точек возврата соответствует тому факту, что точку возврата можно рассматривать как стянувшуюся петлю кривой близ узловой точки. При стягивании петли две проходящие через узел различные касательные сближаются; угол между ними неограниченно уменьшается; в пределе они

сливаются, когда петля превращается в точку возврата. Кроме того, в точке возврата кривая сильнее удаляется от касательной, чем в обыкновенной.—Обоснование обоих этих результатов у Лопиталя страдает тем недостатком, что в точке перегиба может быть $\frac{d^2y}{dx^2} = \infty$, а в точке возврата $\frac{d^2y}{dx^2}$ бывает равно и нулю. Комментаторы Лопиталя упрекали его в том, что из его текста следует, будто в точках перегиба обязательно $ddy = 0$, а в точках возврата $ddy = \infty$. Еще Вариньон (1724) отметил, что при $ddy = \infty$ может не иметься точки возврата (ср. § 70 „Анализа" и комментарий изд. 1768 г., стр. 344 и 346). Текст Лопиталя действительно дает здесь повод к недоразумению, но из его решения задач видно, что он знал случаи, когда при перегибе $ddy = \infty$ (см. § 69).

[80]) Если переписать уравнение

$$y = \frac{ax^2}{x^2 + a^2}$$

в форме

$$y = a - \frac{a^3}{x^2 + a^2},$$

то видно, что рассматриваемая кривая есть смещенная версьера Аньези, уравнение которой обычно записывается так:

$$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}.$$

Кривая имеет две точки перегиба, и асимптотой служит ось Ox. Впервые встречается написанное выше уравнение у Ферма (1657), занимавшегося квадратурой кривой. Название versiera (вероятно, от латинского vertere — обращать, но отнюдь не итальянское versiera — ведьма) она получила в 1748 г. у итальянской ученой-математика Аньези (Maria Gaetana Agnesi, 1718—1799). Аньези определяет ее тем свой-

ством, что $AB:BD=AC:BM$, откуда сразу вытекает при $AB=y$, $BM=x$ приведенное уравнение.

См. Loria, цит. соч., стр. 75—80.

Бернулли разбирает эту задачу (см. J. B., стр. 39). Чертеж в копии J. B. при этом грубо неверен. Шафхейтлин указывает, что „одновременное использование этой почти не употреблявшейся тогда кривой характерно для зависимости Лопиталя от Бернулли" (J. B., стр. 55).

[81]) Следует помнить, что „удлиненная" циклоида Лопиталя называется теперь укороченной, действительно имеющей точку перегиба (удлиненная и обыкновенная циклоида ее не имеют). Так как $DF=\frac{b}{a}AD$ и $EF=ED+DF$, то $y=z+\frac{bu}{a}$.

[82]) Бернулли решает эту задачу тоже двумя способами: J. B., стр. 40—42 и 45—46. И он и Лопиталь не пользуются лишними корнями уравнения, не дающими точек перегиба.

[83]) Об этой кривой сообщал в письмах Гюйгенсу (1663) де-Слюз; ее называют конхоидой Слюза; де-Слюз определил в 1663 г. ее точки перегиба. Кривая эта потом была забыта до 80-х годов прошлого века.

Подробности см. у Loria, цит. соч., стр. 71—74.

Бернулли решает задачу и в прямоугольных и в полярных координатах (см. J. B., стр. 42—43 и 46—47). Полярное уравнение конхоиды де-Слюза, если взять $PF=\rho$, $\angle APF=\omega$ и за полюс выбрать P, а за полярную ось — PA, будет:

$$(\rho\cos\omega-b)=a\cos^2\omega,$$

ибо

$$PD=\frac{b}{\cos\omega},\quad DF=\rho-\frac{b}{\cos\omega}.$$

По недосмотру при выкладках в выражении для dy и ddy неверен знак числителя, а в знаменателе ddy, кроме того, недостает множителя x (ср. комментарий изд. 1768 г.,

стр. 349). Повидимому, в первом издании Лопиталя стояло вместо $\overline{4axx - 4x^3}$ по опечатке $\overline{4ax - 4x^3}$, что ошибочно было исправлено самим автором на $\overline{4ax - 4x^2}$.

Любопытно, что в двух местах этой задачи пишется не xx, а x^2 (в изд. 1768 г.).

84) Параболическая спираль была впервые введена в 1691 г. Я. Бернулли, называвшим ее „parabola helicoidis" или „spiralis parabolica". Он согнул ось обыкновенной параболы в окружность AED, за ординаты принял перпендикуляры к ней EF, за абсциссы ее отрезки AE и связал координаты той же зависимостью, что и у параболы: $\overline{EF^2} = b\overline{AE}$ (у Бернулли: $y^2 = lx$). В посвященной этой кривой работе, опирающейся на лейбницев алгорифм, впервые были введены полярные координаты. Я. Бернулли построил ее касательные, точки перегиба, нашел квадратуру и свел ее ректификацию к квадратуре некоторой кривой, с помощью которой открыл ряд свойств дуг спирали. Ректификация ее, между прочим, привела его фактически к первому в истории математики эллиптическому интегралу.

Если обозначить $y = \rho$, $b = 2p$, $z = a\omega$, то полярное уравнение спирали будет:

$$(\rho - a)^2 = 2ap\omega.$$

Форма кривой меняется в зависимости от величины дроби $\frac{a}{p}$; у Я. Бернулли рассмотрен случай $\frac{a}{p} = 4\pi$.

См Loria, цит. соч., стр. 439—440.

Ср. решение задачи у J. B., стр. 47—48. Последние два члена уравнения для определения точек перегиба, в результате ошибки при вычислениях, в рукописи Бернулли имеют неверные знаки.

85) Развертки впервые появляются в „Horologium oscillatorium" Гюйгенса, который и назвал их эволютами (от латинского evolvere — развертывать). Заметив, что нор-

мали к циклоиде касаются некоторой другой циклоиды, равной первой и лишь смещенной путем параллельного переноса, он установил, что первая циклоида (развертывающаяся) получается при свертывании со второй (развертки) нити, один конец которой закреплен на развертке и которая при свертывании постоянно остается натянутой. Гюйгенс вывел основное свойство развертки (касательная к ней нормальна к развертывающей). Основываясь по существу на том, что эволюта есть место точек пересечения бесконечно близких нормалей эвольвенты, он, с помощью инфинитезимальных рассмотрений, дал способ определения точек эволюты и выражение длины отрезка нормали между эволютой и эвольвентой. Гюйгенс подробно исследовал эволюту циклоиды, которую использовал в теории маятниковых часов, а также параболы, обобщенных парабол Ферма, эллипса и гиперболы. Равенство дуги развертки и свернутого с нее отрезка нити дало в руки Гюйгенсу удобный прием ректификации ряда алгебраических кривых в алгебраических функциях (ибо развертки алгебраических кривых сами суть алгебраические кривые).

В „Methodus fluxionum“ Ньютон также исследовал и применял развертки.

Развертки были подвергнуты подробному изучению и в „Лекциях по интегральному исчислению“ И. Бернулли.

Радиус развертки (радиус кривизны) Лопиталь называет rayon de la développée.

Эволюты являются огибающими нормалей кривой; обобщение эволют дал в 1709 г. знаменитый французский физик Реомюр (René-Antoine de Réaumur, 1683—1757); он заменил нормали семейством прямых, пересекающих данную кривую под постоянным углом.

См. Loria, цит. соч., стр. 614—628 и Cantor, т. III, стр. 140—143.

[86]) Почти все перечисляемые в § 75—76 свойства разверток описаны и доказаны в 15-й лекции „Интег-

рального исчисления" Бернулли (изд. G. Kovalevsky, стр. 63—66). Доказательства, впрочем, у Бернулли и Лопиталя иногда различны.

[87]) Формулу радиуса кривизны в прямоугольных координатах можно было бы получить из упомянутого в прим. 77 гюйгенсова выражения для отрезка нормали. В „Methodus fluxionum" (пробл. V) Ньютона она имеется в почти современном виде:

$$\frac{\overline{1+zz}\sqrt{1+zz}}{\dot{z}},$$

где $z=\dot{y}$, $\dot{x}=1$. В форме

$$z=\frac{ds^3}{dy\,ddx}$$

(s — длина дуги, y — абсцисса, x — ордината) ее дал в 1694 г. Я. Бернулли. В виде $\frac{(dx^2+dy^2)\sqrt{dx^2+dy^2}}{-dx\,ddy}$ она имеется у И. Бернулли (нем. изд. „Интегрального исчисления", стр. 71). Вывод, даваемый И. Бернулли, точно совпадает с тем, который Лопиталь приводит первым в § 79. Другой вывод Бернулли (нем. изд., стр. 71—72), у него, впрочем, изложенный не до конца, есть третий способ § 79 Лопиталя

Формула радиуса кривизны в полярных координатах

$$MC=\frac{\overline{y\,dx^2+y\,dy^2}\sqrt{dx^2+dy^2}}{dx^3+dx\,dy^2-y\,dx\,ddy}$$

при заменах

$$y=\rho,\quad dx=\rho\,d\omega,\quad dy=d\rho,$$

$$dx^2+dy^2-y\,ddy=\rho^2\,d\omega^2+2d\rho^2-\rho d^2\rho$$

(см. прим. 69) переходит в известное выражение:

$$MC=\frac{\left[\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2+2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2-\rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}.$$

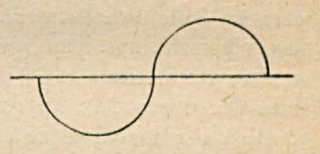
[88]) Вообще говоря, в точке перегиба радиус кривизны равен бесконечности, так как в ней $y''=0$. Однако могут представиться случаи, когда в перегибе радиус претерпевает разрыв иного рода. Это может произойти, когда и y' и y'' в этой точке разрывны. Например, кривая $y^5=x^3$ в начале координат имеет перегиб; далее, так как

$$y'=\frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}, \qquad y''=-\frac{6}{25}x^{-\frac{7}{5}},$$

то

$$r=\frac{\left(1+\frac{9}{25}x^{-\frac{4}{5}}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\frac{6}{25}x^{-\frac{7}{5}}}.$$

При стремлении x к нулю r неограниченно убывает, но в самом начале координат он разрывен вместе с y' и y'' и не имеет определенного значения. Результат, получаемый Лопиталем, объясняется тем, что он исходит здесь из иного понимания радиуса кривизны, чем обычно Если рассматривать последний как радиус соприкасающегося круга, т. е. круга, служащего пределом для кругов, проходящих через три точки кривой, стремящихся слиться в одну, то в случае, разбираемом Лопиталем, соприкасающийся круг не определен. При различном выборе последовательностей трех точек на кривой получаются различные результаты; так, если постоянно выбирать их на секущих прямых, проходящих через точку перегиба, то получается, что $r=\infty$. В обычном случае предельное положение соприкасающегося круга не зависит от выбора последовательностей этих трех точек кривой. По существу Лопиталь



Черт. 13.

определяет радиус кривизны в точке перегиба как предельное значение радиусов кривизны слева и справа от нее. Тогда, действительно, и для кривой $y^5 = x^3$ получается по приведении:

$$r = -\frac{25}{6} x^{\frac{1}{5}} \left(x^{\frac{4}{5}} + \frac{9}{25} \right)^{\frac{3}{2}}$$

и

$$\lim_{x \to 0} r = 0.$$

Аналогичное обстоятельство может встретиться, если соединить две дуги кривых, одну вогнутую и другую выпуклую, близ соединяемых концов которых r неограниченно убывает. Разрыв радиуса кривизны в перегибе легко получить также, соединив, например, две полуокружности наподобие синусоиды; радиус кривизны определен слева и справа от точки перегиба и при переходе через нее меняет знак.

И. Бернулли сообщал в 1695 г. Лейбницу о своей переписке с Лопиталем по вопросу о радиусе кривизны в точках перегиба; при этом, говорит он, они пришли к убеждению, что бывают точки перегиба, в которых r равен нулю, а не бесконечности; другого конечного значения радиуса кривизны в такой точке быть не может (Leibniz, „Math. Schr.", т. III, стр. 185).

Тем же вопросом занимался в 1750 г. швейцарский математик Крамер (Gabriel Cramer, 1704—1752) (см. Cantor, цит. соч., т. III, стр. 840).

89) Эта задача решена была еще Гюйгенсом; имеется решение и в „Интегральном исчислении" И. Бернулли (нем. изд., стр. 69 и 73—74. В дальнейшем при ссылках на это издание ставятся буквы I. R.).

90) „Геометрические" кривые — это алгебраические кривые; только их уравнения можно было выразить тогда в прямолинейных координатах в конечном (не диферен-

циальном) виде с помощью известных знаков функций. Термин „алгебраические кривые" ввел еще в 1684 г. Лейбниц, заменивший им принадлежащее ему же выражение „аналитические кривые".

Трансцендентные кривые (тоже термин Лейбница от 1686 г.) назывались механическими. И. Бернулли примерно до 1700 г. придерживался старой терминологии, укоренившейся в XVII в. благодаря Декарту.

[91]) Ср. I. R., стр. 66.

[92]) Относительно всех этих утверждений см. также прим. 80. Вообще говоря, в точках возврата первого рода радиус кривизны равен нулю. См., например, Э. Чезаро, „Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых" (пер. К. А. Поссе, 1914, т. II, § 608).

[93]) Эволюты эллипса и гиперболы, отнесенных к главным осям (полуоси a, b), будут:

$$\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{c^2}{a}\right)^{\frac{2}{3}}} \pm \frac{y^{\frac{2}{3}}}{\left(\frac{c^2}{b}\right)^{\frac{2}{3}}} = 1,$$

где $c^2 = a^2 \mp b^2$. Развертка эллипса — замкнутая кривая и не кончается (se termine) на малой оси, как неудачно выражается Лопиталь, знающий, что на самом деле она продолжается далее (иначе нельзя было бы говорить о точке возврата). Развертка гиперболы разбирается в „Интегральном исчислении" И. Бернулли (I. R., стр. 74—75).

„Половина параметра малой оси", если принять современное обозначение осей, равна $\frac{a^2}{b}$.

[94]) Ср. I. R., стр. 75—76.

[95]) Развертку логарифмической спирали нашел Я. Бернулли в 1692 г. Ср. также I. R., стр. 108—109.

[96]) Спирали высших порядков — обобщения архимедовой спирали — имеют в полярных координатах уравнение:

$$\rho^m = k\omega$$

(m — положительное число).

Ферма описал ряд их свойств в одном письме от 1636 г. Он дал их квадратуру и свел спрямление к спрямлению парабол высших порядков. Последним вопросом с успехом занимался и Торичелли в 1644 г.

См. Loria, цит. соч., стр. 434—436.

[97]) Предыдущий член первого отношения $TA + \overline{m+1}AO$ не объединен горизонтальной чертой, поскольку не может быть недоразумений в понимании записи $\left(a + b \cdot c \right.$ означает не $a + \frac{b}{c}$, но только $\left. \frac{a+b}{c} \right)$.

[98]) Ср. I. R., стр. 75 и 78.

[99]) С помощью этой леммы далее доказывается ряд теорем о площадях и длинах фигур, относящихся по существу к интегральному исчислению.

[100]) La quadrature absolue independante de celle du cercle.

[101]) Лопиталь (как и И. Бернулли в то время) называет эпициклоиды и гипоциклоиды обычно просто roulettes, чего перевод не придерживается.

Эпициклоиды встречались еще в древности, в птолемеевой системе мира (II в. н. э.), согласно которой планеты обращались вокруг земли по эпициклоидальным или еще более сложным кривым. Арабский ученый Насср-Эддин (1201—1274?) и знаменитый Коперник (Nik. Coppernicus, 1473—1543) заметили, что при качении окружности по внутренней стороне неподвижной окружности вдвое большего радиуса точки первой описывают диаметр второй

Художник и строитель Дюрер (Albrecht Dürer, 1471—1528) указал на построение особого вида эпициклоиды с помощью специального прибора. Около 1674 г. в бытность в Париже датский астроном Ремер (Olaf Römer, 1644—1710) и до него, повидимому, основатель проективной геометрии Дезарг (Girard Desargues, 1593—1661) указали, что зубчатые колеса, профиль которых имеет форму эпициклоиды, испытывают наименьшее трение. Свойства эпи- и гипоциклоид были подробно исследованы геометрическим путем ла-Гиром в 1694 г., давшим ряд теорем об их квадратуре, спрямлении (когда описывающая точка лежит на периферии описывающего круга), касательных, телах вращения и т. д. Он возвращался к ним также в 1706 и 1708 гг. Ряд механических приложений эти кривые получили в „Математических началах натуральной философии" Ньютона (1685), где изучены также их эволюты. Весьма детально проведено рассмотрение их в „Интегральном исчислении" И. Бернулли (I. R., стр. 92—108).

См. Loria, цит. соч., стр. 479—504.

102) Ср. очень сходные формулировки в I. R. И. Бернулли, стр. 100—101. И. Бернулли дает доказательство этих свойств методом интегрального исчисления.

103) Ср. I. R., стр. 101.

104) В I. R. И. Бернулли (стр. 101): „Если образующий круг движется по вогнутой стороне неподвижного, то диаметр образующего круга становится отрицательной величиной. Поэтому для получения спрямления и измерения длины и площади циклоидальной кривой нужно произвести следующую замену" и т. д.

105) Под отношением чисел, очевидно, понимается отношение рациональных чисел.

Ср. I. R.: „Некоторые циклоиды суть геометрические кривые, некоторые же — механические. Этого, насколько мне известно, никто до сих пор не заметил. Я утверждаю

именно следующее. Если круги ABC и BDE таковы, что радиус FB относится к радиусу GB [G — центр подвижного, F — неподвижного круга. — *А. Ю.*], как число к числу, т. е. если их отношение выражается отношением чисел, то я утверждаю, что циклоида ADC есть геометрическая кривая. Наоборот, если отношение радиуса FB к радиусу GB не выражается отношением чисел, то циклоида ADC есть механическая кривая. Первое доказывается следующим образом... Остается, таким образом, доказать, что можно геометрически определить дугу BD, относящуюся к данной BT... как число к числу.

Если... (радиус AF относится к радиусу BG. — *А. Ю.*) как, например, 13 к 5, то нужно, очевидно, взять дугу BT два раза и еще три пятых ее... Но известно, что данную дугу, или, что то же, данный угол можно геометрическим путем разделить на любое число равных частей. Именно, при этом всегда приходят к геометрическому уравнению, соответствующему делению угла" (стр. 95—96).

Поразительно не только общее сходство текстов, но и совпадение выбранного отношения 13:5.

Что уравнение, о котором здесь говорится, алгебраическое, можно увидеть хотя бы из формулы:

$$\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n = \cos\varphi + i\sin\varphi,$$

откуда для определения $\cos\frac{\varphi}{n}$ или $\sin\frac{\varphi}{n}$ получается уравнение n-й степени.

Совпадение текстов продолжается и при разборе случая несоизмеримости радиусов. Бернулли пишет: „Всякая подобная как геометрическая, так и механическая линия или замыкается или продолжается неограниченно, так как ее образование всегда можно продолжить. Если образующий круг ABC описывает при своем первом обороте

посредством точки A циклоиду ADE, то эта циклоида еще не закончена, но при продолжающемся качении будет описана вторая циклоида EFG, затем третья GHI, затем четвертая IKL и т. д. до тех пор, пока, наконец, точка A после нескольких оборотов не вернется в свое начальное положение A. В этом случае при продолжении качения снова получится та же циклоида, так что все эти циклоиды вместе составляют только одну кривую $ADEFGHIKL$ и т. д. Если же радиусы неподвижного и образующего круга несоизмеримы, то их окружности тоже несоизмеримы. Поэтому образующий круг ABC совершит бесконечно много оборотов, прежде чем точка A не вернется опять в свое начальное положение A. Таким образом получится бесчисленное множество циклоид, которые образуют одну кривую $ADEFGHIKL$ и т. д. Я утверждаю, что эта кривая — механическая. Если скажут, что она геометрическая, то проведем через кривую какую-либо прямую HF. Эта прямая пересечет (ясным образом) кривую в бесконечном числе точек H, m, n, и т. д., F. А так как уравнение, выражающее природу какой-нибудь линии, должно иметь число измерений, по меньшей мере равное числу различных точек, в которых эта линия может пересекаться с прямой, то уравнение, выражающее природу этой кривой, будет иметь бесконечное число измерений, что бессмысленно. Следовательно, кривая — механическая.

Отсюда ясно, что невозможно разделить данную дугу круга на две части, которые относятся как число к числу иррациональному (numerus surdus), т. е. несоизмеримы" (стр. 96—97).

За незначительными отклонениями текст Лопиталя и здесь почти дословный перевод бернуллиевого. Характерно также употребление Лопиталем (стр. 233, строка 2 снизу) слова sourde для обозначения иррационального числа, как оно и переведено; у Бернулли в латинском оригинале пишется numerus surdus. Самый термин восходит к началу XIII в

Слово „измерение“ передает французское dimension. Термин degré (степень) употребляется наряду с dimension еще Декартом в „Géometrie“.

Любопытно упомянуть о рассуждениях известного историка математики Монтюкла (Jean Etienne Montucla, 1725—1799). Трансцендентность обыкновенной циклоиды — парадоксальна, ибо циклоида как будто проще эпициклоиды, поскольку прямая проще круга; объясняет ее Монтюкла так: „Обыкновенная циклоида есть лишь эпициклоида, образованная качением конечного круга по бесконечному. Но конечное и бесконечное несоизмеримы. Следовательно, циклоида подпадает под случай эпициклоид, у которых основание несоизмеримо с образующим кругом и должна быть, как и они, трансцендентна“ („Histoire des mathèmatiques“, 1799, т. II, стр. 392).

[106]) В 1692 г. Лейбниц показал, что у данной развертки имеется бесчисленное множество развертывающих, в зависимости от размера длины свертываемой нити. Их расстояния между собой по нормалям одинаковы, т. е. они параллельны.

Ср. также I. R. И. Бернулли (стр. 80—85), где установлены те же свойства, что в § 108 Лопиталя, и разобран пример эвольвенты кривой $ax^2 = y^3$.

Разумеется, под „спрямляемостью“ у Лопиталя нужно понимать спрямление в алгебраических функциях.

[107]) Точка возврата второго рода называется Лопиталем point de rebroussement de la seconde sorte. Выражение „возвратная кривая“ передает французское rebroussante.

Ясно, что части DE, EF, DG получены от развертывания соответственно частей AD, AB, DC. Возможно, что Лопиталь первый открыл этот вид особых точек.

Лопиталь не приводит конкретных примеров кривых, имеющих точки возврата второго рода. Де-Гюа де-Мальв (1740) вообще отрицал существование подобных точек, объ-

ясняя „ошибку" Лопиталя тем, что он рассматривал лишь часть кривой, отдельные ветви которой как будто и образуют такую точку. Эйлер в 1749 г. выступил в защиту Лопиталя и опроверг возражения де-Гюа де-Мальва. Он привел также классический образец кривой с точкой возврата второго рода, встречающийся во всех учебниках, именно кривую с уравнением $y = \alpha x^2 \pm \beta x^2 \sqrt{x}$ (особая точка — начало координат). Эйлер также подробно исследовал вопрос о точках возврата второго рода для уравнений $y = \alpha x^k \pm \beta x^{k+\frac{m}{n}}$ и о радиусах кривизны в этих точках. См. Cantor, цит. соч.. т. III, стр. 796—797 и 820—822 и Ш. Ж. Валле-Пуссен, цит. соч., т. II, § 318 и сл.

[108]) Каустическими или фокальными кривыми занялись в XVII в. в силу интереса, представляемого ими для оптики.

Каустики отражения и преломления (катакаустики и диакаустики, по терминологии И. и Я. Бернулли, 1692) суть огибающие семейства отраженных или преломленных лучей, исходящих из одной точки или параллельных.

Автором первой работы (1682) по катакаустикам был Чирнгауз; он привел без доказательства ряд теорем, частью, между прочим, неверных; Чирнгауз вообще отличался торопливостью в публикации своих недоведенных и не основанных до конца работ, страдавших поэтому поверхностностью и нередко ошибками. Гюйгенс в 1690 г. исследовал ряд свойств диакаустик. Подробно изучены оба вида фокусных линий были И. Бернулли. Диакаустикам посвятил специальную работу и Лопиталь: „Méthode facile pour déterminer les points des caustiques par réfraction etc." (Mém. Paris, X, 1666—1699), которую мне не удалось видеть.

См. Loria, цит. соч., стр. 662—672.

[109]) Les petits côtés.

110) Ср. I. R. И. Бернулли (стр. 114). Эта теорема Чиргауза была впервые доказана Лейбницем в 1682 г. (в письме к Чиргаузу).

111) Ср. (другой) вывод в I. R., стр. 124—127.

112) Большая полуось названа в тексте demi-axe traversant (latus transversum—поперечная сторона, по-латыни)—старое название большой оси конического сечения.

113) Ср. I. R., стр. 121—122 (гораздо менее подробно, чем у Лопиталя).

114) Чиргауз допустил при решении этой задачи ошибку; он полагал, что точки каустики делят пополам отрезки между расположенными на одной ординате точками данного круга и круга, построенного на AC как диаметре. Равенство $MC = \frac{1}{2} MP$ дал Чиргауз.

Каустике круга посвящены стр. 114—121 I. R. И. Бернулли.

115) Ср. I. R., стр. 127—128.

116) Ср. I. R., стр. 133—135.

117) Ср. I. R., стр. 123.

118) Ср. I. R., стр. 123.

119) Задача эта, как и определение соответствующей диакаустики, была решена Я. Бернулли в 1692 г. (ср. также I. R., стр. 136—137).

120) Очевидно, что эта точка будет одним из фокусов конического сечения.

121) Овалы Декарта, рассмотренные последним в „Géometrie“, обладают тем свойством, что сумма произведений расстояний каждой из их точек M от двух данных точек — фокусов F_1, F_2 на постоянные числа m, n — постоянна. Декарт пришел к ним в поисках кривой, нормали к кото-

рой в точке M образуют с прямыми F_1M и F_2M углы, синусы которых находятся в постоянном отношении. Пусть $\sin\alpha:\sin\beta = \pm\frac{m}{n}$, для общности можно взять оба знака. Пользуясь биполярной системой координат и построив чертеж, нетрудно показать, что тогда $\frac{dr_1}{dr_2} = \pm\frac{n}{m}$ (r_1, r_2 — радиусы-векторы), так что $mr_1 \pm nr_2 = \text{const}$. Если такой овал является границей двух сред, показатели преломления которых находятся в отношении $\pm\frac{m}{n}$, то лучи, исходящие из одного фокуса, по преломлении соберутся в другом; отсюда — значение подобных овалов в оптике. Эллипс и гипербола — частные случаи декартовых овалов ($m = \pm n$).

См. Loria, цит. соч., стр. 161—170.

[122]) Огибающая семейства кривых (именно, парабол — траекторий тел, брошенных под разными углами с данной скоростью из данной точки) встречается впервые в 1644 г. у Торичелли. Однако общего подхода к проблеме и ее решению у него не имеется. Определение огибающей — касательной семейства кривых, зависящего от параметра — как места точек пересечения соседних кривых и прием определения ее уравнения с помощью диференцирования по параметру дал в 1692 г. Лейбниц; в 1694 г. он определил параболу, служащую огибающей семейства кругов $(x-b)^2 + y^2 = ab$, где b — параметр. Лопиталь вел по этому вопросу переписку и с Лейбницем и с Бернулли (см. вступительную статью к этому изданию, стр. 35—36).

[123]) Огибающей в данном случае, как легко видеть, является астроида (нормальное уравнение: $u^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$). В следующем параграфе дается спрямление четверти астроиды.

[124]) Toute pareille.

125) По-французски сказано sesquialtere — от латинского ratio sesquialtera, полуторное отношение, 3 : 2. Латинский термин восходит еще к римскому математику Боэцию (Boëtius, 480?—524).

126) Хорда, соединяющая точки касания двух касательных, проведенных из данной точки, является, как известно, ее полярой; данная точка является полюсом этой хорды. В теории поляр конических сечений доказывается, что когда полюсы лежат на одной прямой, то поляры образуют пучок прямых, пересекающихся в одной точке.

Диаметр, проходящий через точку C, есть поляра бесконечно удаленной точки прямой EL. По теории полюсов и поляр см. Н. Ф. Четверухин, „Введение в высшую геометрию", 1934, или Б. К. Млодзеевский, „Основы аналитической геометрии на плоскости", 1923.

127) Правило это принадлежит не Лопиталю, а И. Бернулли, впоследствии его дополнившему, но, видимо, не знавшему, что иногда оно не приводит к раскрытию неопределенности, сколько бы раз его ни применять повторно (см. вступительную статью к настоящему изданию, стр. 32—33).

128) Лопиталь здесь производит интегрирование, не учитывая лишь получающейся при этом постоянной. Его отношение $\frac{DF}{Ff} = \frac{AE}{Mm - Nn}$ можно переписать ($Ff = DF \cdot d\nu$, где ν — центральный угол, $Mm = ds_1$, $Nn = ds_2$, $AE = c$) в виде $ds_1 - ds_2 = c d\nu$, откуда $s_1 - s_2 = c\nu + \text{const}$.

Таким образом уже Лопиталь знал эту изящную зависимость между длинами дуг параллельных кривых. Лориа, не отмечая этого, указывает, что чисто аналитическое доказательство теоремы дал немецкий математик, издатель известного журнала, Крелле (August Leopold Crelle 1780—1855) в 1821 г. О параллельных кривых см. Loria, цит. соч., стр. 643—651.

[129]) О присылке решения этой и некоторых нижеследующих задач Лопиталь просил И. Бернулли в 1695 г. (см. вступительную статью, стр. 35).

[130]) Здесь Лопиталь употребляет выражение roulettes extérieures (эпициклоиды) и roulettes intérieurs (гипоциклоиды).

[131]) В настоящем параграфе Лопиталь рассматривает случай точки самоприкосновения; в частности у кривой $y^4 = x^4 + a^2x^2$. „Каппа-кривая", уравнение которой $ax^2 = (x^2 + y^2)\,y^2$ и которая обычно фигурирует в учебниках как пример самоприкасающейся кривой, была знакома еще раньше; о ней говорится в переписке Гюйгенса и де-Слюза в 1662 г., ею занимался Барроу (1670). Ветвями кривой, как правильно указывает Лопиталь, служат EDH и GDF, а не EDG и HDF или EDF и GDH.

Чертеж кривой NDN неполон, так как не учтены двузначность корня и возможность двух знаков у x.

Сведение квадратуры площади DPN к квадратуре гиперболы выражает тот факт, что интеграция $\int \frac{x^2 - a^2}{\sqrt{2x^2 - a^2}}\,dx$ приводит, в частности, к интегралу $\int \sqrt{t^2 - a^2}\,dt$, служащему также для вычисления площади равносторонней гиперболы. Выразить последний интеграл по-современному Лопиталь не может, так как знак функции логарифма еще отсутствует. Вообще в то время естественнее было определить подобную интеграцию через площадь издавна знакомой кривой, чем через сравнительно новое понятие логарифма.

[132]) В § 48 Лопиталь, имея уравнение $f(x, y) = 0$ определял $\frac{dy}{dx}$ из того, что — в современных обозначениях — $\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = 0$, откуда для максимума или

минимума находил, что $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Здесь он прямо пользуется условием $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$.

[133]) Таким образом Лопиталь утверждает, что условием наличия у кривой „особых" (по позднейшей терминологии) точек служат $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

[134]) Лопиталь говорит „les différences des deux appliquées", что и переведено через „разность двух ординат" хотя имеются в виду обе координаты (общий термин coordinates, введенный Лейбницем, Лопиталь не применяет).

[135]) Замена отсутствующего члена уравнения звездочкой имеется в „Géometrie" Декарта.

[136]) Несколько странное для нас умножение на произвольную прогрессию для получения производного уравнения применял и Ньютон. Доказательство правильности этого совершенно элементарно. Пользоваться им в таком виде бывает выгодно для уничтожения тех или иных членов в „производном" уравнении.

[137]) Qu'on la multiplie par une progression arithmétique — имеется в виду почленное умножение членов уравнения на члены прогрессии.

[138]) Par le produit des deux progressions arithmétiques — имеется в виду почленное умножение на произведения соответствующих членов обеих прогрессий.

[139]) Об известном правиле Гудде для определения кратных корней алгебраических уравнений с помощью производных уравнений см. также прим. 11. Доказательство, приводившееся Гудде, в модернизированном виде можно передать так. Алгебраическое уравнение n-й степени $f(x) = 0$ умножается на $(x - x_1)^2$, причем $f(x_1) \neq 0$. Тогда новое уравнение имеет x двукратным корнем. Если

умножить каждый член его на соответствующий член прогрессии $a, a, + d, \ldots, a+(n+2)d$, то получившееся уравнение делится, как можно убедиться, на $x-x_1$ без остатка, т. е. имеет x_1 однократным корнем, а $x-x_1$ — общим делителем с $f(x)$. Если же $f(x)=0$ умножить на $x-x_1$ и проделать те же операции, то деление получающегося уравнения на $x-x_1$ без остатка невозможно.

[140]) Уравнение $y=\frac{st+tx}{s}$ по существу выражает уравнение прямой, проходящей через данную точку $T(-s, 0)$ и произвольную точку на оси ординат $H(0, t)$. Дальнейшее ныне сводится к совместному решению уравнения прямой $y=kx+y_0$ и кривой $f(x, y)=0$ с тем, чтобы $f(x, kx+y_0)=0$ имело двукратный корень для x; из последнего условия находится k. (Лопиталь же определяет x для точки касания). Основная идея этого метода принадлежит Декарту.

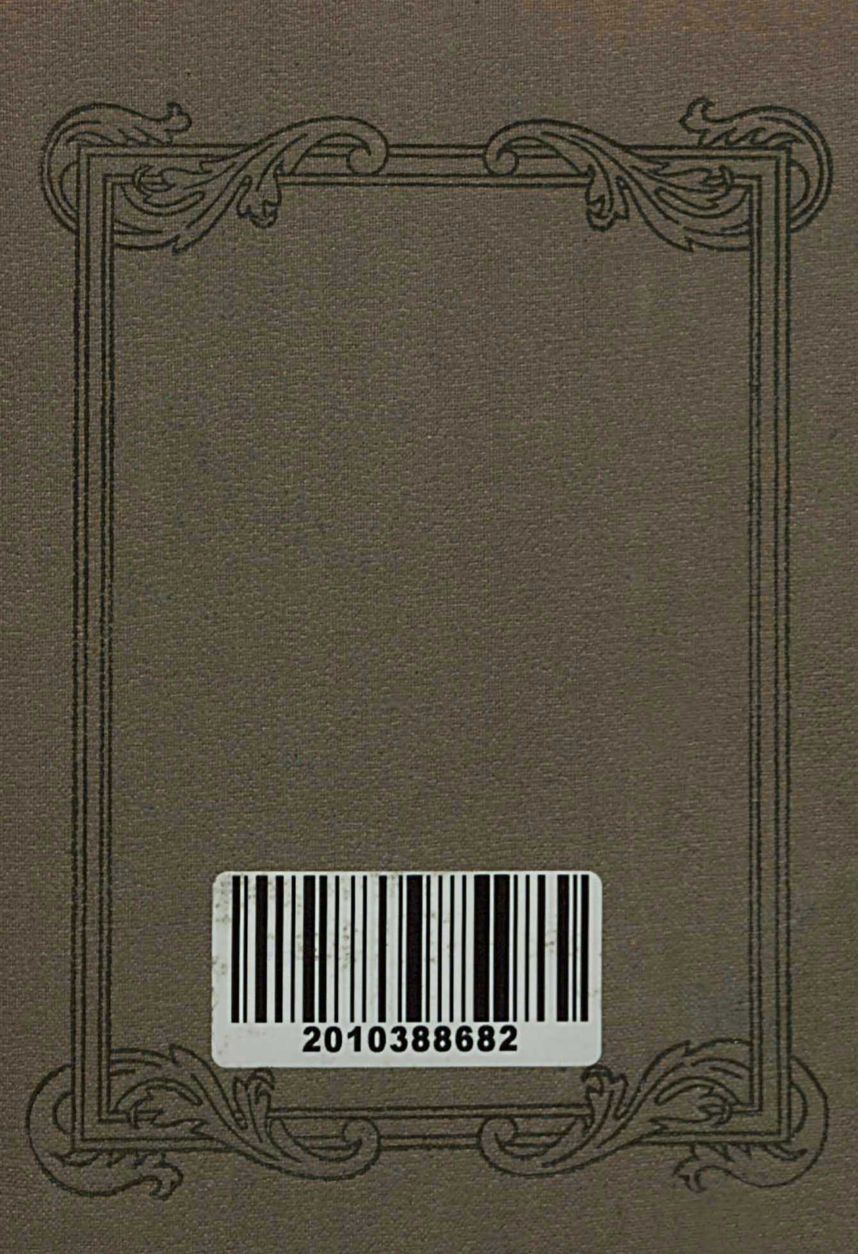
[141]) См. прим. 4. Декарт решает аналогичные задачи чрезвычайно сходным путем (ср., например, определение нормали к эллипсу у Г. Вилейтнера „Хрестоматия по истории математики", 1932, вып. III, перевод П. С. Юшкевича, стр. 27—31).

[142]) Соприкасающийся круг — cercle baisant. Соприкасающийся круг (известный и Ньютону, см. Methodus fluxionum" пробл. V) введен был Лейбницем в 1686 г. Лейбниц говорил, что он как бы прижимается к кривой, обнимает, целует ее. Отсюда его название — оскулирующий круг (латинское osculor — целовать). И Лейбниц и Ньютон указывали, между прочим, что между кривой и соприкасающимся кругом в точке касания нельзя провести другого касающегося кривой в этой точке круга. Термин Лопиталя — буквальный французский перевод лейбницева названия.

Словом „соприкасается" переведено baise. Точка соприкосновения у Лопиталя — point baisant.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редакция *А. П. Юшкевича*. Оформление *О. Н. Персияниновой*.
Корректура *З. В. Смирновой*. Наблюдал за выпуском *Л. М. Волкович*.
Сдано в производство 3/I 1934 г. Подписано к печати 20/III 1935 г.
Индекс Т 12-5-4. Листов 27. Бум. л. $6^3/_4$. Тираж 6000—авт. л. 14.
Тип. зн. в 1 бум. л. 133.568. Формат $72 \times 105^1/_{32}$. Заказ № 2051.
ГТТИ № 253. Уполном. Главлита № Б—34087.
2-я тип. ОНТИ им. Евг. Соколовой. Ленинград, пр. Кр. Ком., 29.


2010388682